Finanzmathematik im SoSe 2018
Prof. Dr. M. v. Renesse
5. Übung

June 11, 2018

1. Betrachten Sie ein 3-Perioden-Finanzmarktmodell mit $d = 1$, in welchem $S_t^0 = (1+r)^t$ und $S_t^{(1)} = (1+\xi_t)^t$, wobei $\{\xi_i, i = 1, 2, 3\}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen seien mit $P(\xi = -\frac{1}{2}) = P(\xi = \frac{1}{2}) = P(\xi = 0) = \frac{1}{3}$. Unter welchen Bedingungen an r ist das Modell arbitragefrei? Bestimmen Sie ggf. die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für dieses Modell. Es sei $C = (S_3^{(1)} - 2)_+$ die Auszahlung einer europäischen Call-Option auf $S^{(1)}$ mit Fälligkeit 3 und Strike Preis 2. Bestimmen Sie die Menge aller Arbitrage-Preise von C.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie

$$\big(\text{dim } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) = k \in \mathbb{N}\big) \Longleftrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ besteht aus } k \text{ Atomen.}$$

3. Geben Sie eine Erweiterung des Cox-Ross-Rubinstein Modells für $d = 2$ mit zwei stochastisch unabhängigen zufälligen Wertpapierprozessen an, welche jeweils allein betrachtet ein CRR-Modell darstellen. Bestimmen Sie Bedingungen für Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.

4. Es sei $\mathcal{M}$ ein arbitragefreies vollständiges Mehrperioden-Finanzmarktmodell mit $T \geq 2$. Zeigen Sie für $S \leq T$, dass das Modell, welches durch Einschränkung von $\mathcal{M}$ auf Handelszeitpunkte $\{1, \cdots, S\}$ entsteht, ebenfalls arbitragefrei und vollständig ist (vergl. Vorlesung).

5. Es seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass X und Y stochastisch unabhängig sind genau dann, wenn

$$\mathbb{E}_P(X|\sigma(Y)) = \text{ const. } P\text{- fast sicher.}$$