

# Finanzmathematik im SoSe 2018

Prof. Dr. M. v. Renesse

## 4. Übung

May 28, 2018

1. Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ . Zeigen Sie, dass  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$  ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ist, und beweisen Sie durch Anwendung des Projektionssatzes in Hilberträumen die Existenz von  $E_P(X|\mathcal{G})$  für  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

2. Zeigen Sie in der Situation von Aufgabe 1 durch Anwendung eines geeigneten Abschneide-Argumentes, dass  $E_P(X|\mathcal{G})$  auch für integrierbares  $X$  existiert. (Gehen Sie dabei zunächst davon aus, dass  $X \geq 0$ )

3. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zur Beschreibung der dreifachen unabhängigen Wiederholung eines Münzwurfes mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{3}$  an. Es bezeichnen  $X_1, X_2, X_3 : \Omega \mapsto \{0, 1\}$  jeweils die Zufallsvariablen für Erfolg in den drei Durchgängen und  $Z := (X_1 + X_2)X_3$ . Bestimmen Sie die beiden bedingten Erwartungswerte  $Y_i := E_P(Z|\mathcal{F}_i)$ , wobei  $\mathcal{F}_1 := \sigma(X_1)$  und  $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$  die von  $X_1$  bzw.  $X_1$  und  $X_2$  erzeugten Sigma-Algebren auf  $\Omega$  sind.

Überprüfen Sie (entsprechend dem 'Faktorisierungslemma' für messbare Abbildungen) in beiden Fällen, dass sich  $Y_i$  als Funktion von  $X_1$  bzw. von  $X_1$  und  $X_2$  darstellen lässt.

4. Es sei  $X_1, X_2, X_3$  unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit  $P(X_i = 1) = p$  und  $P(X_i) = 1-p$  mit einem  $p \in [0, 1]$ . Es bezeichne  $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0,1,2,3}$  die vom Prozess  $X_\bullet$  auf  $\Omega$  erzeugte Filtrierung, wobei  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$  als triviale  $\sigma$ -Algebra gewählt wird. Zeigen Sie, dass  $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ ,  $S_0 := 0$ , ein  $\mathcal{F}_\bullet$ -Martingal unter  $P$  ist genau dann, wenn  $p = \frac{1}{2}$ .