Finanzmathematik im SoSe 2018
Prof. Dr. M. v. Renesse
2. Übung

April 18, 2018

1. Betrachten Sie ein Einperioden-Finanzmarktmodell mit $d = 1$, $\pi^1 > 0$ und S einer Zufallsvariablen, deren Verteilung durch eine strikt positiven Dichtefunktion f auf $\mathbb{R}$ geben ist, d.h. $P(S \in]a,b]) = \int_a^b f(t)dt$. Finden Sie ein äquivalentes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß für dieses Modell.

2. Betrachten Sie ein Einperioden-Finanzmarktmodell der Dimension d mit $r = 1$, $\overline{\Pi} = (1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^{1+d}$ und S einer d-dimensional Gauß-verteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert $v \in \mathbb{R}^d$ und (möglicher Weise degenerierter) Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Unter welcher Bedingung ist dieses Modell Arbitragefrei?

3. Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ seien als gleichmässig äquivalent bezeichnet, wenn sie dieselben Nullmengen haben und ihre Radon-Nikodym-Dichten $\frac{dP_i}{dP_j}$ beschränkt sind. Zeigen Sie, dass hiermit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert wird.

4. Es sei in einem arbitragefreien d-dimensionalen-Finanzmarktmodell $\mathcal{M} = ((\Omega, \mathcal{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ mit $\pi^0 = 1$ eine weitere Zufallsvariable $C : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ gegeben, welche als Zahlungsversprechen bzw. Auszahlung einer Wettte verstanden wird. Sei ferner ein Vektor $\overline{\xi}$ gegeben, der C mittels $\overline{S}$ repliziert, d.h. dass $\langle \overline{S}, \overline{\xi}\rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = C$ P-fast sicher. Zeigen Sie für die Replikationskosten $\pi_C := \langle \overline{\Pi}, \overline{\xi}\rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$, dass

$$\pi_C = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{P^*}(C),$$

wobei P^* ein zu P äquivalentes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.
Hinweis: Bilden Sie den Erwartungswert bzgl. P^* von

$$\xi^0(1+r) + \langle S, \xi\rangle = C$$