Finanzmathematik im SoSe 2018
Prof. Dr. M. v. Renesse
1. Übung

April 16, 2018

1. Betrachten Sie das Eingangsbeispiel der Vorlesung eines Einperioden-Binomialmodells mit $d = 1$, $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\overline{\Pi} = \binom{1}{1}$, sowie $S^{(1)}(0) = a$ und $S^{(1)}(1) = b$ sowie Zinssatz $r > -1$. Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für die Parameter $a, b, r \in \mathbb{R}$ an, dass dieses Modell arbitragefrei ist. Können Sie ggf. konkrete Arbitrage-Stratgien angeben?

2. Betrachten Sie das obige Binomialmodell im Fall von $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$ und $r = 2$ sowie eine Wette auf S^1 mit der Auszahlungsfunktion $C = (1-S^{(1)})_+$ (sog. Europäische Put-Option mit Strike Preis $K = 1$). Stellen Sie die Auszahlungsfunktion von C als Linearkombination von $B = S^{(0)}$ bzw. $S^{(1)}$ dar und ermitteln Sie hieraus die Replikationskosten π_C für C.

3. Betrachten Sie die Erweiterung des Finanzmarktmodelles in Aufgabe 2 um das Papier $S^{(2)} := C$ und begründen Sie, warum für jede andere Wahl von $\Pi^{(2)} \neq \pi_C$ des resultierende 2-dimensionale Finanzmarktmodell nicht mehr arbitragefrei ist. Überprüfen Sie Ihre Aussage mit dem ersten Fundamentalsatz der Optionspreistheorie.

4. Betrachten Sie ein Einperioden-Modell analog zu Aufgabe 1, jedoch mit drei Ausgängen, d.h. $d = 1$, $\overline{\pi} = \binom{1}{1}$ und $\Omega = \{0, 1, 2\}$ mit $P(\{0\}) = P(\{1\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{3}$ und $S^{(1)}(0) = \frac{1}{2}$, $S^{(1)}(1) = 1$, und $S^{(2)}(2) = 2$ und $r = 0$. Bestimmen Sie die Menge aller zu P äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße.