Analysis II f. Ingenieure

9. Vorlesung 15.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Summe und Skalarprodukt mit Konstanten

Seien $\vec{f}, \vec{g} \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $\vec{f} + \vec{g}$ und $c\vec{f}$ differenzierbar und $\quad (\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}', \quad (c\vec{f})' = c\vec{f}'$.

Produktregeln

- $f \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$, $\vec{g} \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ diff.bar:
$$f\vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial f\vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\vec{g} + f\frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$
- $\vec{f}, \vec{g} \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ diff.bar:
$$\vec{f} \cdot \vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial \vec{f} \cdot \vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$
- $\vec{f}, \vec{g} \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^3$ diff.bar:
$$\vec{f} \times \vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial \vec{f} \times \vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$

Satz 50 (Kettenregel mit partiellen Ableitungen)

$$\frac{\partial \vec{f} \circ \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{g}(\vec{x}))\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x})$$

Satz 49 (Kettenregel mit Ableitungsmatrizen)

Hat man differenzierbare Abbildungen $\vec{g}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \supset \tilde{G} \to \mathbb{R}^p$, so ist die Komposition $\vec{f} \circ \vec{g}$ dort wo sie definiert ist differenzierbar und

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))\vec{g}'(\vec{x})$$

Rechenregeln für den Gradienten

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$$
$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \operatorname{grad} g$$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$