Analysis II f. Ingenieure

8. Vorlesung 11.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 40 (Gradient)

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ ist die Ableitung $f'(\vec{x})$ interpretiert als Vektor oder, genauer, Vektorfeld:

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f := \nabla_{\vec{x}} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)^T$$

Gradient und Richtungsableitung

Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| = 1$, dann gilt für die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} f \cdot \vec{v} = |\operatorname{grad}_{\vec{x}} f| \cos(\angle(\operatorname{grad}_{\vec{x}} f, \vec{v}))$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x + tv_1)^2 + (y + tv_2)^2 - x^2 - y^2}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2txv_1 + t^2 v_1^2 + 2tyv_2 + t^2 v_2^2}{t} = 2xv_1 + 2yv_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Satz 41 (Bedeutung des Gradienten)

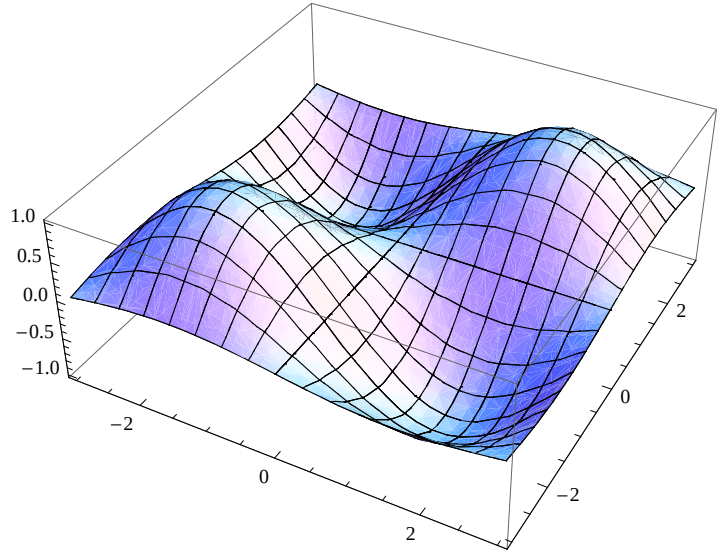
Der Gradient einer Funktion f (eines skalaren Feldes) weist in die Richtung des stärksten Anstiegs von f. Er steht senkrecht auf den Niveaus von f.

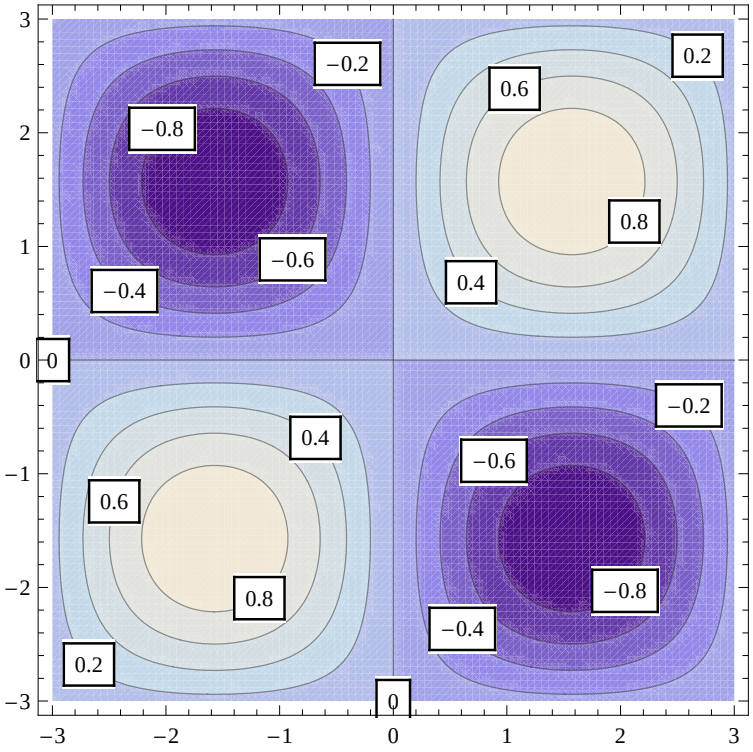
$$N_c := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = c \}$$

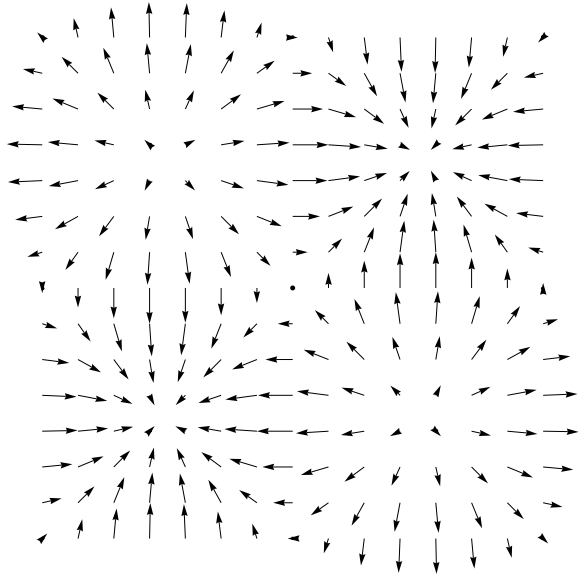
heißt das c–Niveau ($n = 2$: Höhenlinie, $n = 3$: Niveaufläche) von f, $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$







Anwendungen des Gradienten (I)

- Kraft auf einen Ladungsträger im Elektrischen Potentialfeld $\mathbb{R}^d \ni p \mapsto \varphi(p) \in \mathbb{R}$

$$\vec{F}(\vec{p}) = -\nabla\varphi(p)$$

- Horizontale Geschwindigkeit eines ('überdämpften') Massekörpers in Höhenlandschaft $\mathbb{R}^d \ni p \mapsto \varphi(p) \in \mathbb{R}$

$$\vec{v}(\vec{p}) = -\nabla\varphi(p)$$

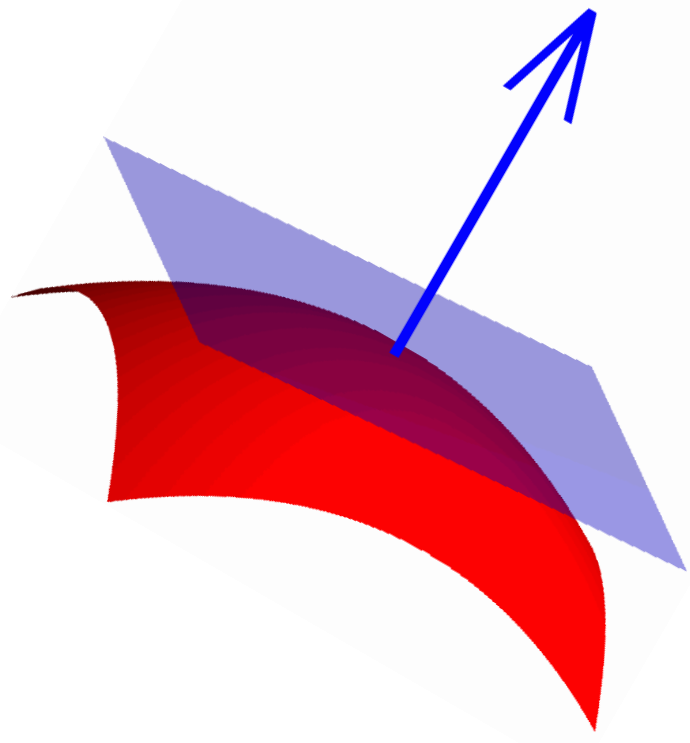
- Flächennormale einer Fläche $\mathcal{F} = \{\vec{z} = (x, \varphi(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ im Punkt $z = (p, \varphi(p))$

$$\nu_{\mathcal{F}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(p)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\varphi(p) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Illustration

$$\mathcal{F} = \{(x, \varphi(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

$$\nu_{\mathcal{F}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(p)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\varphi(p) \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Anwendungen des Gradienten (II): Gradient und Messfehler

$$\vec{f}(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) \approx \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x})\overrightarrow{\Delta x}$$

Beispiel 37: Daumenregel für Wirkung von (Mess-)Fehlern

- Messdaten $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit Fehlern $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.
- Eine differenzierbare Formel $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ für eine interessante Größe.
- Daumenregel für die Auswirkung $\overrightarrow{\Delta f} = \vec{f}(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) - \vec{f}(\vec{x})$ der Messfehler auf die interessante Größe $\vec{f}$:

$$\overrightarrow{\Delta f} \approx \vec{f}'(\vec{x})\overrightarrow{\Delta x} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x})\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x})\Delta x_n$$

Satz 58: Fehlerschrankensatz

$f : \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ differenzierbar, G offen, $\vec{x}, \vec{y} \in G$ und ihre Verbindungsstrecke $\overline{\vec{x}\vec{y}} \subset G$. Existieren Schranken $M_1, \ldots, M_n$, sodass für alle $\vec{z} \in \overline{\vec{x}\vec{y}}$ gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{z}) \right| \leq M_i.$$

Dann gilt

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq \sum_i M_i |x_i - y_i|.$$

Auswirkung von Messfehlern

$$|\Delta f| \leq \sum_i M_i |\Delta x_i|.$$