Analysis II f. Ingenieure

7. Vorlesung 08.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz

Differenzierbare Abbildungen sind stetig.

Beweis

$$|f(\vec{x}+\vec{\Delta})-f(\vec{x})| \leq |\langle df(\vec{x}),\vec{\Delta}\rangle| + |\vec{\Delta}|r(\Delta) \longrightarrow 0 \text{ für } \Delta \to \vec{0}.$$

Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. Bsp.: $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ stetig in $\vec{0}$ aber dort nicht diff'bar.

Richtungsableitung

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}\colon G \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\vec{f}'(\vec{x})\vec{v} = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{t}$$

für alle $\vec{x} \in G$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\vec{v}$ ein Einheitsvektor, d.h. $|\vec{v}| = 1$, so heißt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) := \vec{f}'(\vec{x})\vec{v}$$

die Richtungsableitung von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2$, $v = (1, 2)$

$$\begin{aligned}\vec{f}'(\vec{x})\vec{v} &= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 + (y+2t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2xt + 4yt + t^2 + 4t^2}{t} = 2x + 4y.\end{aligned}$$

Definition 35 (Partielle Ableitungen)

Die partielle Ableitung von $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $\vec{x}$ ist

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) := \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{e}_j}(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(x_1,\ldots,x_j+t,\ldots,x_n) - \vec{f}(x_1,\ldots,x_n)}{t}$$

Falls alle part. Ableitungen $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x})$, $j = 1,\cdots,n$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existieren heißt f dort *partiell differentierbar*.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x}_1) = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2xt + + t^2}{t} = 2x$$

Satz 36 (Bestimmung der Ableitungsmatrix aus partiellen Ableitungen)

Falls $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}$, so ist $\vec{f}$ auch partiell diffbar in $\vec{x}$ und die Funktionalmatrix $f'(\vec{x}) = d\vec{f}(\vec{x})$ berechnet sich aus den partiellen Ableitungen gemäß:

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Satz 38(Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit)

Existieren für $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen Ableitungen und sind diese als Funktionen auf in $\vec{x} \in G$ stetig so ist $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}$ differenzierbar.

Bemerkung: Alternative sprechweise: $\vec{f}$ *total* differenzierbar.

Strategie zum Ableiten

- Stetig? Ja oder weiß nicht: weitermachen. Nein: Abbildung ist nicht differenzierbar (könnte aber partiell differenzierbar sein).
- Partielle Ableitungen bestimmen. Wenn das nicht geht: nicht differenzierbar.
- Partielle Ableitungen stetig?
  - Ja: Funktion ist differenzierbar, Ableitungsmatrix aus partiellen Ableitungen.
  - Nein: Fehlergrenzwert aus der Definition der Differenzierbarkeit untersuchen. Die Matrix A ist dabei durch die partiellen Ableitungen gegeben.

Beispiel 1: $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = 2x =: g(x,y)$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto g(x,y) = 2x \text{ stetige Funktion}\surd$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = 2y =: h(x,y)$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto h(x,y) = 2y \text{ stetige Funktion}\surd$$

$\Rightarrow$ f differenzierbar in jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $df(\vec{x}) = (2x, 2y)$.

Beispiel 2: $f(x,y):\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2} & \text{f. } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{f. } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$

in $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =: g(x,y)$$

in $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Also z.B. für $\vec{x}_k = (1/k, 1/k) \to \vec{0}$

$$\lim_k \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_k) = \lim_k g(\vec{x}_k) = \lim_k \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{k})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{k})^2}{2(\frac{1}{k})^2}$$

$$= \lim_k \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\lim \vec{x}_k)$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ ist im Punkt $\vec{x} = \vec{0}$ nicht stetig, d.h. hinreichendes Kriterium nicht anwendbar.

Beispiel 2 (Forts.): $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$

Analog: in $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Behauptung: f ist tatsächlich nicht diffbar in $\vec{x} = \vec{0}$,
denn andernfalls muss also (nach Satz 36)

$$df(\vec{0}) = (\tfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}), \tfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})) = (0,0)$$

Sei nun z.B. $\vec{\Delta} = (\Delta, \Delta) \in \mathbb{R}^2$, dann

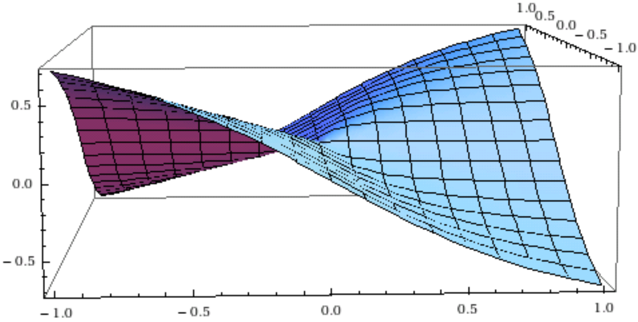
$$|f(\vec{0}+\vec{\Delta}) - f(\vec{0}) - \langle df(\vec{0}), \vec{\Delta}\rangle| = |f(\vec{\Delta})| = |\Delta|\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= |\vec{\Delta}| r(\vec{\Delta}) \text{ mit } r(\vec{\Delta}) := 2 \not\to 0 \text{ für } \Delta \to 0.$$

$\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar in $\vec{x} = \vec{0}$ aber dort nicht (total) differenzierbar.

Beispiel 2 (Forts.): $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$

Funktionsgraph:



('Doppelknick') $\rightsquigarrow$ keine Tangentialebene über $\vec{x} = \vec{0}$.