

# Analysis II f. Ingenieure

6. Vorlesung 04.11.10

Folien:

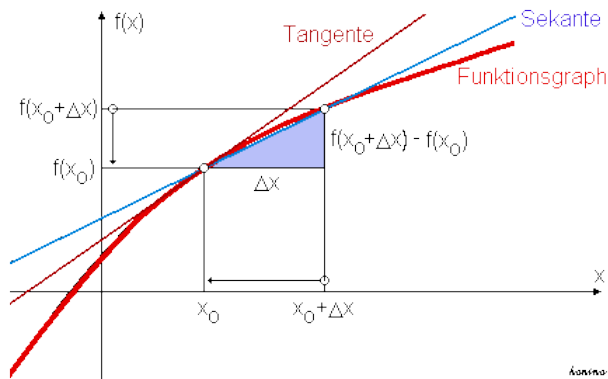
Max v. Renesse

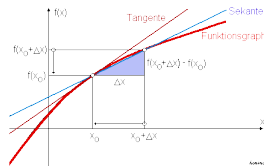
nach Vorlagen von

**G. Paul Peters**

Fakultät II: Institut für Mathematik

# Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$



Erinnerung: Ableitung von Funktionen  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 

Tangente an  $f$  im Punkte  $x_0$  = Gerade  $g(x) = a + m \cdot x$  mit

$$m = f'(x_0) \quad \text{und} \quad a = f(x_0) - mx_0$$

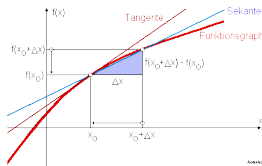
Approximationsfehler

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)| \leq |x - x_0| \cdot r(|x - x_0|)$$

mit

$$r(|x - x_0|) \longrightarrow 0 \text{ f\"ur } x \longrightarrow x_0.$$

# Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$



## Definition/Satz

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  is differenzierbar in  $x_0 \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn es eine geeignete Gerade  $g(x) = a + m \cdot x$  gibt, so dass

$$|f(x) - g(x)| \leq |x - x_0| \cdot r(|x - x_0|) \text{ mit } r(|x - x_0|) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } x \rightarrow x_0$$

bzw. (äquivalent) falls ex.  $m \in \mathbb{R}$ , so dass

$$|f(x_0 + \Delta) - f(x_0) - m \cdot \Delta| \leq |\Delta| \cdot r(|\Delta|) \text{ mit } r(|\Delta|) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } \Delta \rightarrow 0.$$

Name:  $m = 'f'(x_0)'$  Ableitung von  $f$  im Punkt  $x_0$ . ( $\Rightarrow a = f(x_0) - mx_0$ ).

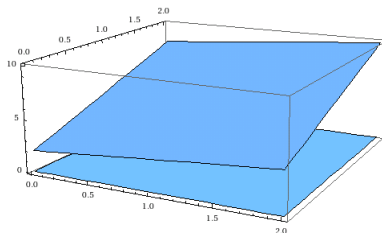
# Affin-Lineare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

## Definition

Eine Funktion  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  der Form  $g(\vec{x}) = a + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle$  mit festem  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  *affin-linear*.

**Bemerkung:** Verallgemeinerung von  $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) = a + m \cdot x \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel:**  $n = 2$ ,  $a = 2$ ,  $\vec{v} = (1, 3)$



**Interpretation:**  $a$  = Achsenabschnitt,  $\vec{v}$  = Steigungsvektor

# Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

## Definition

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn es eine geeignete affin-lineare Funktion  $g(\vec{x}) = a + \langle v, \vec{x} \rangle$  gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - g(\vec{x})| \leq |\vec{x} - \vec{x}_0| \cdot r(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \text{ mit } r(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$$

bzw. (äquivalent) falls ex.  $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass

$$|f(\vec{x}_0 + \vec{\Delta}) - f(\vec{x}_0) - m \cdot \vec{\Delta}| \leq |\vec{\Delta}| \cdot r(|\vec{\Delta}|) \text{ mit } r(|\vec{\Delta}|) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } \vec{\Delta} \rightarrow 0.$$

Name:  $v = 'df(\vec{x}_0)'$  Ableitung von  $f$  im Punkt  $\vec{x}_0$ . ( $\Rightarrow a = f(x_0) - \langle \vec{v}, \vec{x}_0 \rangle$ ).

# Beispiel

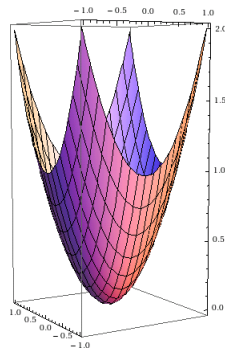
Rotationsparaboloid ( $n = 2$ ):  $f(\vec{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}_0 + \vec{\Delta}) &= f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) \\
 &= x_0^2 + 2x_0\Delta_x + \Delta_x^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta_y + \Delta_y^2 \\
 &= f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} \right\rangle + |\vec{\Delta}|^2 \\
 &= f(\vec{x}_0) + \langle \vec{v}, \vec{\Delta} \rangle + |\vec{\Delta}|^2
 \end{aligned}$$

mit  $\vec{v} := (2x_0, 2y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Folglich

$$|f(\vec{x} + \vec{\Delta}) - f(\vec{x}) - \langle \vec{v}, \vec{\Delta} \rangle| = |\vec{\Delta}|^2 = |\vec{\Delta}| r(|\vec{\Delta}|)$$

mit  $r(|\vec{\Delta}|) := |\vec{\Delta}| \rightarrow 0$ , falls  $|\vec{\Delta}| \rightarrow 0$ .  $\Rightarrow$  ist  $f$  diff'bar in  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$  mit  $df(\vec{x}_0) = (2x_0, 2y_0)$ .



## Beispiel (Forts.)

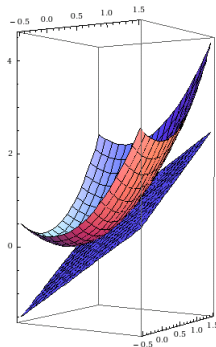
Rotationsparaboloid ( $n = 2$ ):  $f(\vec{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$

Bestimmung der Tangente an  $f$  über Fußpunkt z.B.  $\vec{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\vec{v} = (2x_0, 2y_0) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} a &= f(\vec{x}_0) - \langle \vec{v}, \vec{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= -\frac{1}{2} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x + y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$





# Differenzierbarkeit von Abbildungen $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

## Definition

Die Abbildung  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$  mit  $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , ist

differenzierbar im Punkt  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  genau dann wenn jede der Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  in  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist.

Die Zeilenmatrix gebildet aus den Ableitungsvektoren der Komponentenfunktionen

$$\begin{pmatrix} df_1(\vec{x}) \\ df_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ df_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} =: d\vec{f}(\vec{x}_0)$$

heißt *totales Differential*, *Funktionalmatrix* oder *Ableitung* von  $\vec{f}$  im Punkt  $\vec{x}_0$ .

# Differenzierbarkeit von Abbildungen $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

## Satz

Die Abbildung  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  ist genau dann differenzierbar in  $\vec{x}_0$  mit Funktionalmatrix  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , wenn

$$|\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta}) - \vec{f}(\vec{x}) - M \cdot \vec{\Delta}| = |\vec{\Delta}| r(|\vec{\Delta}|)$$

mit

$$r(|\vec{\Delta}|) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } |\vec{\Delta}| \rightarrow 0.$$