Analysis II f. Ingenieure

5. Vorlesung 01.11.10

Folien:
Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 17 (Grenzwert einer Abbildung)

$\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann sagen wir

$\vec{f}(\vec{x})$ konvergiert gegen $\vec{b}$ für $\vec{x}$ gegen $\vec{a}$,

wenn für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $G \setminus \{\vec{a}\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}.$$

Wir schreiben kurz

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Definition 19 (Stetigkeit)

$\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in G$. Dann heißt $\vec{f}$ stetig in $\vec{a}$, wenn

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Eine Abbildung heißt stetig, wenn sie in allen Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Stetigkeit *widerlegen*

Finde eine gegen $\vec{a}$ konvergente Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in G, sodass $(\vec{f}(\vec{x}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ nicht oder nicht gegen $\vec{f}(\vec{a})$ konvergiert.

Stetigkeit *nachweisen*

Finde eine stetige Funktion $g\colon G \to \mathbb{R}$ mit $g(\vec{a}) = 0$, sodass

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})| \leq g(\vec{x}).$$

Beispiele

Beispiel 1

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

g ist stetig in $\vec{x} = \vec{0} = (0,0)$, denn sei $(\vec{x}_k = (x_k, y_k))_{k \geq 0}$ eine beliebige Folge mit $\vec{x}_k \to \vec{0}$, dann

$$|g(\vec{0}) - g(\vec{x}_k)| = g(\vec{x}_k) = \frac{x_k^2}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \leq |x_k| \to 0,$$

d.h. für alle solche Folgen mit $\vec{x}_k \to \vec{0}$ gilt

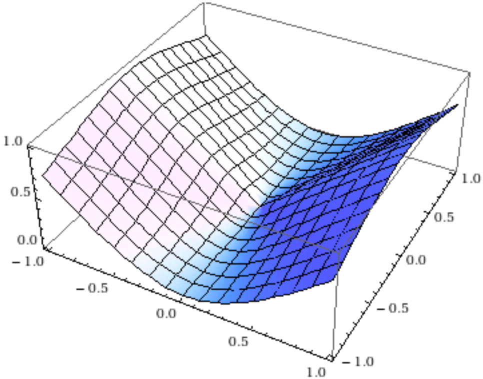
$$\lim g(\vec{x}_k) = g(\lim_k \vec{x}_k).$$

Beispiele

Beispiel 1 (Forts.)

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Beispiel 2

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

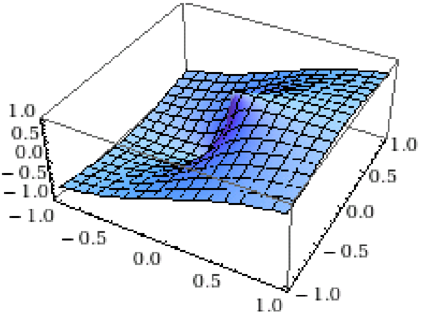
f ist nicht stetig in $\vec{x} = \vec{0} = (0,0)$, denn sei z.B. $\vec{x}_k := (\frac{1}{k}, 0)$, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = 1 \neq 0 = f(\vec{0}) = f(\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k).$$

Beispiel 2

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Satz 22 (Komponentenweise Stetigkeit)

$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Rechnen mit stetigen Funktionen

- Hintereinanderausführungen stetiger Funktionen sind stetig.
- Insbesondere sind stetige Verknüpfungen stetiger Funktionen stetig.
- z.B.: Summe, Differenz, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Produkt einer skalaren Funktion mit einer vektorwertigen, Division durch eine nicht verschwindende Funktion.

Definition

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $M \in \mathbb{R}$ Maximum (bzw. Minimum) von f auf G, wenn für alle $\vec{x} \in G$ gilt $f(\vec{x}) \leq M$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq M$) und es ein $\vec{x}_\mathrm{m} \in G$ gibt, sodass $f(\vec{x}_\mathrm{m}) = M$.

Satz 25 (Extremwerte auf Kompakta)

Eine stetige Funktion nimmt auf einer nicht–leeren kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches ihr Maximum und Minimum an.