

Analysis II f. Ingenieure

4. Vorlesung 28.10.10

Folien:

Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

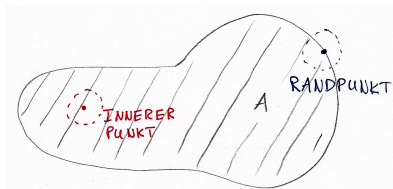
Fakultät II: Institut für Mathematik

Erinnerung:

- Offene Kugel um $\vec{a}$ mit Radius $r > 0$:

$$B_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \}.$$

- Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn es in **allen** offenen Kugeln um $\vec{a}$ solche Punkte gibt, die **in** A liegen und welche, die **nicht in** A liegen.
- Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **innerer Punkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn es **eine** offene Kugel um $\vec{a}$ gibt, die in A **enthalten** ist.



- $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn **kein Randpunkt** von A in A enthalten ist.
- $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn **alle Randpunkte** von A in A enthalten sind.

Satz 6 (Offenheitskriterium)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **offen**, wenn alle ihre Punkte **innere Punkte** sind.

Weitere Begriffe aus der Topologie im $\mathbb{R}^n$

- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung von $\vec{a} \in A$** , wenn $\vec{a}$ innerer Punkt von A ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A \subset B_R(0)$ ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie **beschränkt** und **abgeschlossen** ist.

Satz 6 (Offenheitskriterium)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **offen**, wenn alle ihre Punkte **innere Punkte** sind.

Weitere Begriffe aus der Topologie im $\mathbb{R}^n$

- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung von $\vec{a} \in A$** , wenn $\vec{a}$ innerer Punkt von A ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A \subset B_R(0)$ ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie **beschränkt** und **abgeschlossen** ist.

Definition 9 (Konvergenz)

Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen $\vec{a}$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k - \vec{a}| = 0.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}.$$

Satz 11 (Komponentenweise Konvergenz)

Eine **Folge von Vektoren konvergiert** genau dann, wenn **alle** **Komponentenfolgen konvergieren**.

Satz 15 (Folgenkompaktheit)

Jede Folge in einer **kompakten Teilmenge** $A \subset \mathbb{R}^n$ enthält eine **in A konvergente Teilfolge**.

Definition 17 (Grenzwert einer Abbildung)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann sagen wir

$\vec{f}(\vec{x})$ konvergiert gegen $\vec{b}$ für $\vec{x}$ gegen $\vec{a}$,

wenn für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $G \setminus \{\vec{a}\}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}.$$

Wir schreiben kurz

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Definition 19 (Stetigkeit)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in G$. Dann heißt $\vec{f}$ stetig in $\vec{a}$, wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$