Analysis II f. Ingenieure

3. Vorlesung 25.10.10

Folien:
Max v. Renesse

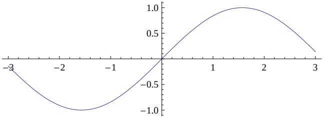
nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

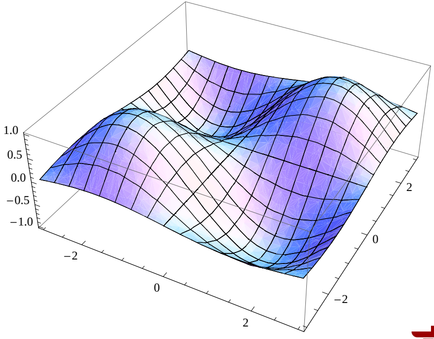
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$



Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

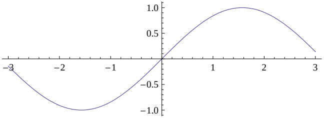
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$

Graph:



Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

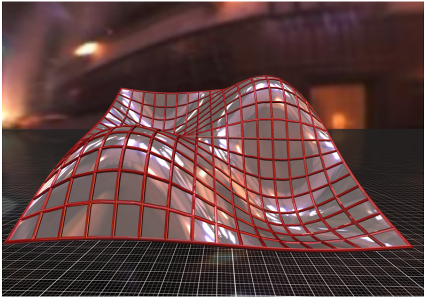
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$



Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

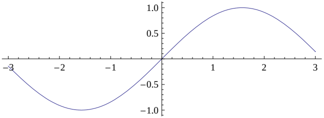
$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$

Graph:



Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

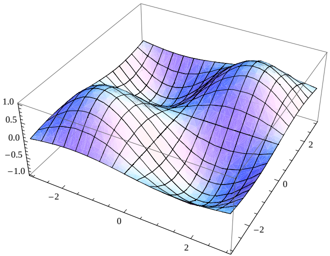
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$

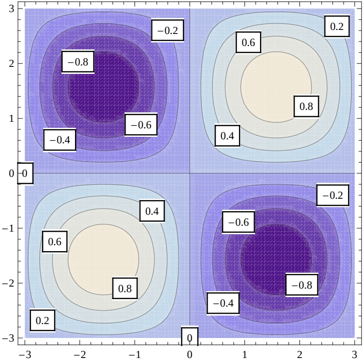


Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$

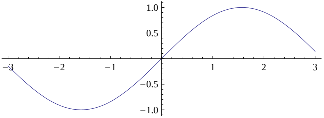
Höhenlinien:





Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

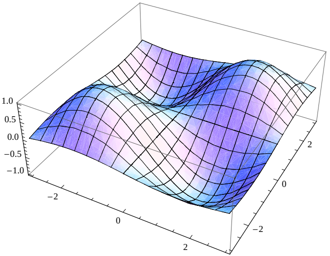
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$

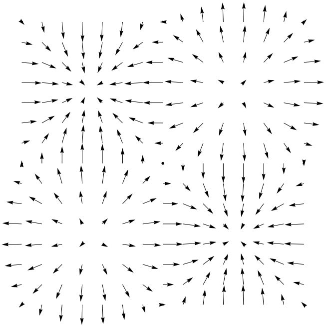


Analysis II: mehrere Variablen, mehrdim. Funktionswerte

$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (\cos(x)\sin(y), \sin(x)\cos(y))$

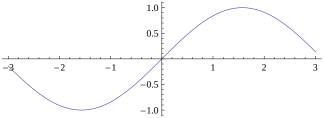
Vektorfeld:





Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

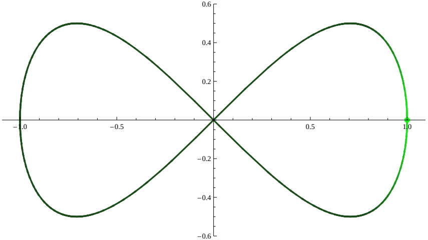
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$

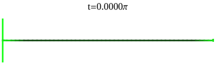


Analysis II: eine Variable, mehrdimensionale Funktionswerte

$\vec{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t/2), \sin(t)/2)$

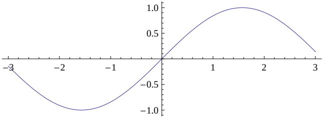
Kurve:





Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

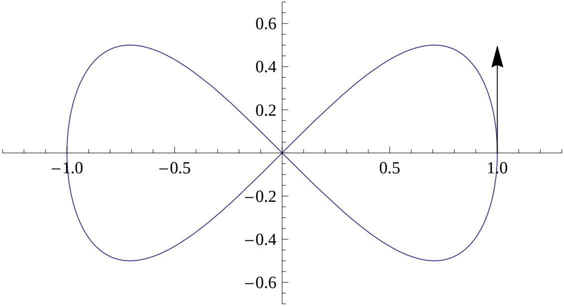
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$



Analysis II: eine Variable, mehrdimensionale Funktionswerte

$\vec{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t/2), \sin(t)/2, -\sin(t/2)/2, \cos(t)/2)$

Kurve mit Geschwindigkeitsvektor:



Der n–dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

- Vektoren, Punkte: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
- Betrag, Länge, Norm: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

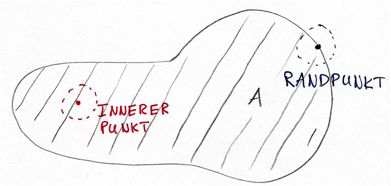
  Für den Betrag gelten folgende Formeln ($c \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$)
  - $|c\vec{x}| = |c||\vec{x}|$
  - $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ Dreiecksungleichung.
  - $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ Cauchy–Schwarzsche Ungleichung.
- Abstand: $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$.

  Die Dreiecksungleichung ergibt für den Abstand

$$|\vec{x} - \vec{z}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y} - \vec{z}|$$

Begriffe aus der Topologie im $\mathbb{R}^n$

- Offene Kugel um $\vec{a}$ mit Radius $r > 0$:
$$B_r(\vec{a}) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \,\}.$$
- Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:
$$B_r(\vec{a}) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad B_r(\vec{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$
- Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt innerer Punkt einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $B_r(\vec{a}) \subset A$.



- $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn kein Randpunkt von A in A enthalten ist.
- $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn alle Randpunkte von A in A enthalten sind.