27. & 28. Vorlesung 07.& 10.02.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Unendliche Reihen

Eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

heißt Reihe mit den Gliedern oder Summanden $a_k \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und den Partialsummen s_n. Man schreibt kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

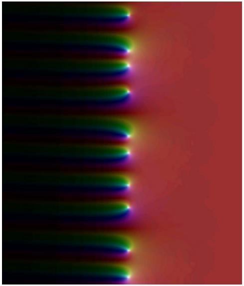
für die Reihe sowie für ihren Grenzwert.

geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

harmonische Reihe, Riemannsche Zetafunktion

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt harmonische Reihe. Sie ist divergent.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ ist für $s > 1$ konvergent und sonst divergent. Die dadurch beschriebene Funktion $]1, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt Riemannsche Zetafunktion.



Wikipedia

Notwendiges Kriterium

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist a_k eine Nullfolge.

Integralkriterium

Für $a_k = f(k)$ mit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ganau dann, wenn für ein t_0 gilt, dass $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{t_0}^{R} f(s)ds < \infty$.

Absolute Konvergenz

Wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und jede ihrer Umordnungen (und zwar immer gegen denselben Zahlwert).

Majorantenkriterium

Falls $|a_k| \leq b_k$. Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Quotientenkriterium

- Wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1$, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
- Wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1$, so divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Wurzelkriterium

- Wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}<1$, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
- Wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}>1$, so divergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Leibniz–Kriterium

- Wenn die Folge a_k eine monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

- Der Grenzwert der Reihe liegt immer zwischen zwei aufeinander folgenden Partialsummen.

Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und dem Entwicklungspunkt z_0 in der Variablen z.

Konvergenzradius

Es gibt genau eine relle Zahl $R \in [0, \infty]$ ($R = \infty$ ist auch erlaubt), sodass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- $|z - z_0| < R$ konvergiert,
- $|z - z_0| > R$ divergiert.

Potenzreihen ableiten

Potenzreihen kann man innerhalb des Konvergenzkreises differenzieren, in dem man die Summanden einzeln differenziert.
Die Potenzreihe der Ableitung hat denselben Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe.

Exponentialfunktion

$$e^z := \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Sinus– und Kosinusfunktion

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Taylorreihe

Die Taylorreihe einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f im Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sie konvergiert in x genau dann gegen $f(x)$, wenn das Restglied aus dem Satz von Taylor für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.