25. Vorlesung 24.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 139 (Integralsatz von Gauß, Divergenzsatz)

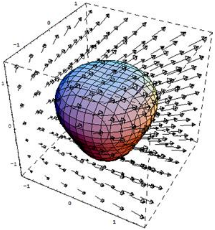
Sei $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter Bereich, dessen Rand $\partial \boldsymbol{B}$ aus endlich vielen glatten Flächen besteht. Sei $\vec{v}\colon \boldsymbol{B} \to \mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

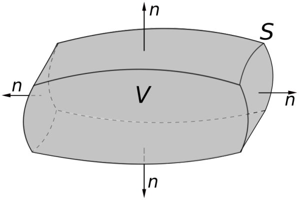
$$\iiint\limits_{B} \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \iint\limits_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Dabei muss $d\vec{O}$ aus $\boldsymbol{B}$ heraus zeigen. Andernfalls muss das entsprechende Oberflächenintegral negativ gerechnet werden.

Erläuterungen

Physikalische Bedeutung





$$\iiint\limits_B \operatorname{div} \vec{v}\, dV \;\hat{=}$$ (Gesamt-)Volumen erzeugt im Inneren von B pro Zeitschritt durch Quellen bzw. Senken von $\vec{V}$

$$\iint\limits_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}. \;\hat{=}$$ (Gesamt-)Durchfluss von Volumen gemäss $\vec{V}$ durch Randmembran ∂B pro Zeitschritt

Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differentialgleichung‘:

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a)$$

entspricht in höheren Dimensionen

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Dh.

$$\operatorname{div} \vec{v} \text{ entspricht } f'$$

und

$$f(b) - f(a) \text{ entspricht } \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Satz von Gauß – Rechenbeispiel

$$\vec{v}(x,y,z) = (x, xy, z^3), \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Berechnung der linken Seite im Gauss'schen Satz:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 1 + x + 3z^2$$

Berechnung des 3D-Integrals mittels Kugelkoordinaten:

$$\iiint\limits_K (1 + x + 3z^2) dxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + r\sin\theta\cos\phi + 3\cos^2\theta) r^2 \sin^2(\theta) d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 0 + 2\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} r^4 (3\cos^2\theta\sin\theta) d\theta dr$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi.$$

$$\vec{v}(x,y,z) = (x, xy, z^3), \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Berechnung der rechten Seite im Gauss'schen Satz:
Wähle z.B. Standard-Parametrisierung der Kugeloberfläche:

$$\vec{X} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto \partial K; \quad \vec{X}(\phi, \theta) = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$$

$$\rightsquigarrow \vec{O}(\phi,\theta) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} = \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}; \; \vec{V}(\vec{X}(\phi,\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \cos\phi \sin\phi \sin^2\theta \\ \cos^3\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial K} V \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{V}(\vec{X}(\phi,\theta)) \cdot \vec{O}(\phi,\theta) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 \sin^2\theta + \sin^2\phi \cos\phi \sin^3\theta + \cos^4\theta) \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4}{3}\pi + 0 + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

$\square$