23. & 24. Vorlesung 17.& 20.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 129 (parametrisierte Fläche)

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$. Eine stetig partiell differenzierbare, surjektive und (mit Ausnahme von Randpunkten) injektive Abbildung

$$\vec{x}: B \to \mathcal{F} \quad \text{mit der Eigenschaft (außer in Bandpunkten)} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \neq 0$$

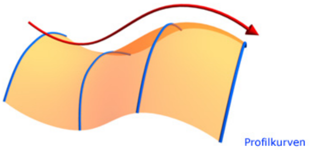
heißt Parametrisierung. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ nennt man Fläche, wenn es für $\mathcal{F}$ eine solche Parametrisierung gibt.

Veranschaulichung

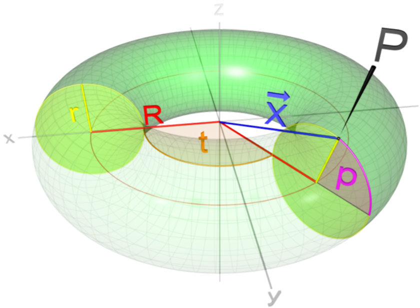
$\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die mit einem 2D-krummlinigen Koordinatensystem $\vec{x}$, d.h.

$$\mathbb{R}^2 \supset B \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{x}(u, v) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$$

beschrieben werden kann.



Beispiel – Torusfläche



Parametrisierung: $B = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$\vec{x}(t,p) = \begin{pmatrix} x(t,p) \\ y(t,p) \\ z(t,p) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \cdot \cos p \\ \sin t \cdot \cos p \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos p)\cos t \\ (R + r\cos(p))\sin t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es gibt (unendlich viele) andere Parametrisierungen.

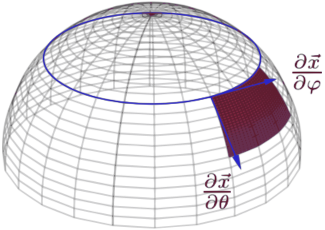
Vektorielles und Skalares Flächenelement

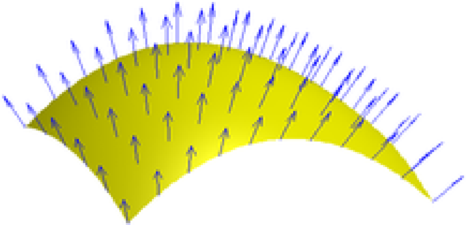
Definition Vektorielles Oberflächenelement

Das vektorielle Oberflächenelement der Parametrisierung $\vec{x}: B \to \mathcal{F}$ ist

$$d\vec{O} := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} du dv$$

Geometrische Bedeutung: $\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \rightsquigarrow$ **Flächennormalenvektor**





Länge $|\vec{n}| \rightsquigarrow$ **Flächeninhalt eines in finitesimalen Flächenstücks.**

Vektorielles und Skalares Flächenelement

(Skalares) Oberflächenelement

Das skalare Oberflächenelement der Parametrisierung $\vec{x}: B \to \mathcal{F}$ ist

$$dO := \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv$$

Formaler Zusammenhang zw. Vektoriellem und Skalarem Flächenelement

$$dO = \left| d\vec{O} \right|$$

Beispiel (Forts) – Torus

Flächennormalenvektor

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}p} = \begin{pmatrix} \cos(t)\cdot\cos(p) \\ \sin(t)\cdot\cos(p) \\ \sin(p) \end{pmatrix} \cdot r \cdot (r \cdot \cos(p) + R)$$

Skalares Flächenelement

$$\mathrm{d}A = |\vec{n}| \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}p = r \cdot (r \cdot \cos(p) + R) \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}p$$

Definition 132 (Skalares Oberflächenintegral)

Sei $f : F \to \mathbb{R}$ eine stetige skalare Funktion, dann wird das skalare Oberflächenintegral von f über $\mathcal{F}$ folgendermaßen definiert:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} f dO := \iint\limits_{\vec{x}} f dO := \iint\limits_{B} f(\vec{x}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv.$$

Wichtiger Spezialfall: $f(\vec{x}) = 1 = \text{const.}$

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} 1 dO = \text{Flächeninhalt der Fäche } \mathcal{F}$$

Beispiel (Forts) Torusfläche

1) Bestimmung des Flächeninhalts:

$$\iint_{\mathcal{F}} 1\,dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos(\phi))\,dt\,d\phi = 4\pi^2 R \cdot r.$$

2) Bestimmung des Trägheitsmoments bei Rotation um die z-Achse:

$$T_z^{\mathcal{F}} := \iint_{\mathcal{F}} f\,dO \text{ mit } f(\vec{x}) = f(x,y,z) = x^2 + y^2.$$

Berechnung des Integrals:

$$f(\vec{x}(t,\phi)) = x^2(t,\phi) + y^2(t,\phi) = (R + r\cos(\phi))^2$$

$$\iint_{\mathcal{F}} 1\,f\,dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos(\phi)^2 \cdot r(R + r\cos(\phi))\,dt\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos(\phi))^3\,dt\,d\phi = 2\pi^2 r^2 \cdot R(\frac{3}{4}r^2 + R^2)$$

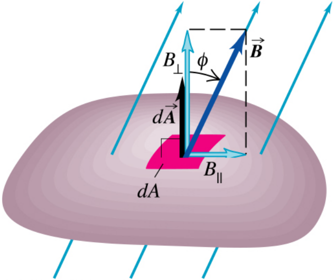
Definition 136 (Flussintegral)

Sei $\vec{v}$ ein stetiges Vektorfeld auf $\mathcal{F}$. Dann wird das Integral oder Flussintegral von $\vec{v}$ über $\mathcal{F}$ folgendermaßen definiert:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{O} := \iint\limits_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{O} := \iint\limits_{B} (\vec{v} \circ \vec{x}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv$$

$$= \iint\limits_{B} \det \left(\vec{v} \circ \vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv$$

Anschauliche Bedeutung des Flussintegrals



$\iint_{\mathcal{F}} \vec{B} \cdot d\vec{O} \overset{\wedge}{=}$ Strömung (Einheit: m^3/sec) durch eine Membran $\mathcal{F}$ im Strömungsfeld $\vec{B}$.

Beispiel

$F \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch Parametrisierung $\vec{x} : B \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$B = [0,1] \times [0,1]; \quad \vec{x}(s,t) = (s^2, s+t, t^2) \in \mathbb{R}^3$$

Vektorfeld $\vec{v}$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(x,y,z) = (x, 1, yz)^t \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = (2s, 1, 0), \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = (0, 1, 2t), \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = (2t, -4st, 2s) = \vec{n}(s,t)$$

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} s^2 \\ 1 \\ (s+t)t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -4st \\ 2s \end{pmatrix} dsdt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2s^2 t - 4st + 2s^2 t^2 + 2st^3) dsdt = -\frac{7}{36}.$$

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

- Das skalare Oberflächenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung, d.h., es hängt nur von $\mathcal{F}$ und nicht von $\vec{x}$ ab.
- Beim Flussintegral hängt nur das Vorzeichen von der Parametrisierung ab. Die Richtung von $d\vec{O}$ zählt positiv.

Flächen aus mehreren glatten Teilen

Besteht eine Fläche aus mehreren glatten Teilen, so addiert man die einzelnen Integrale.