21. & 22. Vorlesung 10.& 13.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 119 (Transformationsformel 2D)

Seien $B, R \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig und

$$\vec{x} = (x, y)\colon R \to B, \qquad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

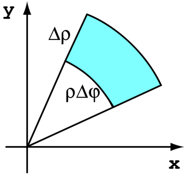
eine stetig partiell differenzierbare, surjektive und (mit Ausnahme von Randpunkten) injektive Abbildung – eine Koordinatentransformation. Dann gilt

$$\iint\limits_B f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_R f(x(u, v), y(u, v))\,\underbrace{|\det(\vec{x}'(u, v))|\,du\,dv}_{dF}$$

dF wird Flächenelement in den Koordinaten (u, v) genannt.

Satz 122 (Integration in Polarkoordinaten)

$$x = \rho\cos(\phi), \qquad y = \rho\sin(\phi), \qquad dF = \rho\,d\rho\,d\phi,$$
$$\rho \in [0, \infty[, \qquad \phi \in [0, 2\pi].$$



Satz 125 (Transformationformel 3D)

Seien $B, R \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig und

$$\vec{x} = (x, y, z)\colon R \to B, \quad (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

eine stetig partiell differenzierbare, surjektive und (mit Ausnahme von Randpunkten) injektive Abbildung – eine Koordinatentransformation. Dann gilt

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_R f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,\underbrace{|\det(\vec{x}'(u, v, w))|\,du\,dv\,dw}_{dV}$$

Tranformationsformel als Merkregel

Gegeben: $B \subset \mathbb{R}^d$ (Integrationsbereich),$f : B \mapsto \mathbb{R}$ eine (Integrand).
Ferner: Reparamatrisierung (Koordinatentransformation) $\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$, d.h.

$$\mathbb{R}^d \supset B \ni \vec{x} \longleftrightarrow \vec{y} \in \tilde{B} \subset \mathbb{R}^d$$

Dann gilt

$$\iiint\limits_{B} f(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_N = \iint\limits_{\tilde{B}} \tilde{f}(\vec{y}) \left| \frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} \right| dy_1 \cdots dy_N$$

mit

$$\tilde{f}(y_1, \cdots, y_N) := f(\vec{x}(y_1, \cdots, y_N))$$

und

$$\left| \frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} \right| := \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix} \right|$$

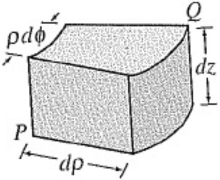
'Volumenelement' der Koordinaten $x \leftrightarrow y$

Volumenelement dV **in den neuen Koordinaten** $x \leftrightarrow y$

$$dV = dx_1 \cdots dx_N \triangleq \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix} \right| dy_1 \cdots dy_N$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten $(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \phi, z)$:

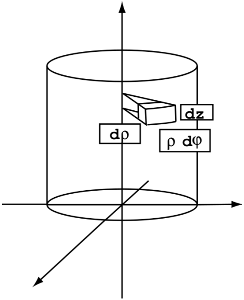
$$dxdydz \triangleq \rho d\rho d\phi dz$$



Beispiele: Spezielle Koordinatensysteme in 3D (I)

Integration in Zylinderkoordinaten

$$x = \rho\cos(\phi),$$
$$y = \rho\sin(\phi), \qquad dV = \rho d\rho d\phi dz$$
$$z = z,$$
$$\rho \in [0, \infty[, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

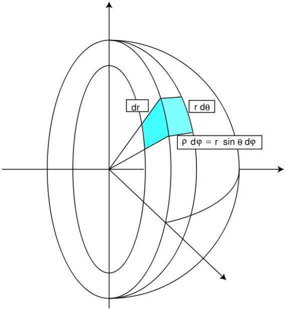


Tafelbeispiel: Berechnung des Volumens des Schraubenkörpers (s. Vorlesung)

Beispiele: Spezielle Koordinatensysteme in 3D (II)

Integration in Kugelkoordinaten

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi),$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi), \qquad dV = r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta$$
$$z = r\cos(\theta),$$
$$r \in [0,\infty[, \quad \phi \in [0,2\pi], \quad \theta \in [0,\pi].$$



Tafelbeispiel: Berechnung des Kugelvolumens (s. Vorlesung)