Analysis II für Ingenieure

2. Vorlesung 21.10.10

Folien:
Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Wiederholung

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T–periodische Funktion, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Fourierkoeffizienten von f durch

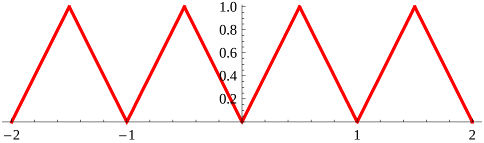
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Das Fourierpolynom n–ter Ordnung von f ist

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

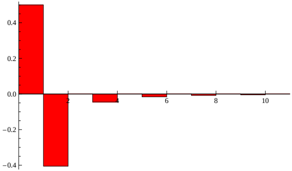
Beispiel: Rauschunterdrückung

Ausgangssignal



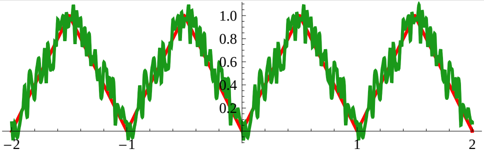
(1–periodische Fortsetzung f von $t \mapsto 2|t|, -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.)

Spektrum (Amplituden)

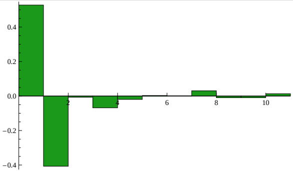


Beispiel: Rauschunterdrückung

Verrauschtes Signal

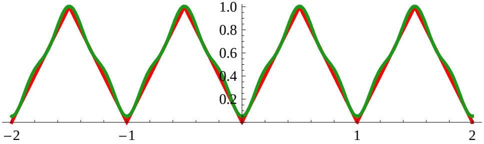


Spektrum (Amplituden)

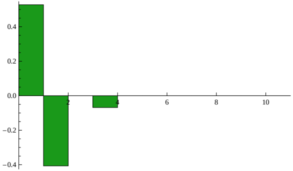


Beispiel: Rauschunterdrückung

Gefiltertes Signal (Amplituden $< 0,05$ abgeschnitten)



Spektrum (Amplituden)



Tricks beim Berechnen der Fourierkoeffizienten

1. Für eine T–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt
$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt.$$
2. Für eine **ungerade** Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (z.B. $f(t) = \sin(t)$):
$$\int_{-L}^{L} f(t)dt = 0.$$
3. Für eine **gerade** Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (z.B. $f(t) = \cos(t)$):
$$\int_{-L}^{L} f(t)dt = 2 \cdot \int_0^L f(t)dt.$$
4. Für $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sei $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(t) := f(t)g(t)$, dann
   - falls f und g gerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ gerade,
   - falls f und g ungerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ gerade,
   - falls f ungerade und g gerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ ungerade.

'Orthogonalitätsrelationen'

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gilt:

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \\ 2, & \text{falls } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \text{ oder } k = l = 0 \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \end{cases}$$

Intepretation

Die Funktionen $\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}(\sin k\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}}(\cos k\omega t), k = 1, 2, \cdots\}$ sind eine (vollständige) **Orthonormalbasis** bzgl. dem Skalarprodukt

$$u \bullet v := \int_0^T u(t)\cdot v(t)\,dt$$

Approximation im quadratischen Mittel

Definition

Ein T–periodisches trigonometrisches Polynom ϕ approximiert eine gegebene T–periodische Funktion f im quadratischen Mittel optimal, wenn

$$\int_0^T (f(t) - \phi(t))^2 dt \quad \textbf{minimal}.$$

Satz

Sei f eine stückweise monotone T–periodische Funktion.

1. Das n–te Fourierpolynom ϕ_n von f ist die **beste Approximation von f im quadratischen Mittel unter allen trigonometrischen Polynomen der Ordnung n.**
2. Der Approximationsfehler $\int_0^T (f(t) - \phi_n(t))^2 dt$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null.

Abschließende Bemerkungen

1. Falls $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ **unstetig in** x_0, d.h.

$$lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f(x_0+) \neq f(x_0-) := lim_{x \nearrow x_0} f(x),$$

dann gilt für $\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \phi_n(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}}$$

2. Falls $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ und T–periodisch kann man auch mit der **komplexen Fourier-Approximation** arbeiten: $\omega := \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{\psi_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega t}}$$

$$\boxed{c_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt.}$$