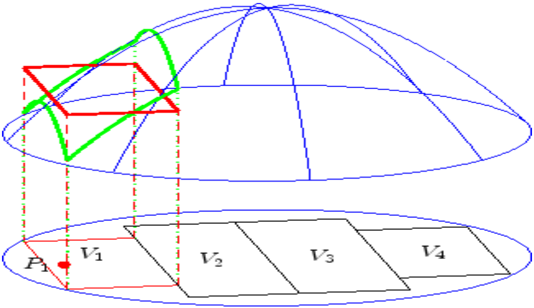
19. & 20. Vorlesung 03.& 06.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Mehdimensionale Integration



Definition

$$\iint_P f(x,y)dxdy := \lim_{\max_i \|V_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{M} f(x_{V_i}, y_{V_i}) \mathrm{Vol}(V_i)$$

Warnung: Existiert nicht immer! Entwarnung: Existiert, falls f nicht *'sehr unstetig'* und falls P nicht *'sehr krummlinig'*.

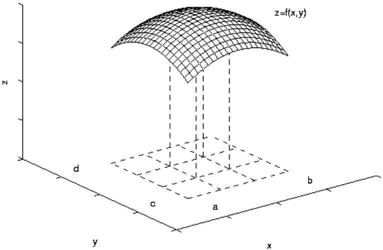
$$dF := dx\,dy \qquad dV := dx\,dy\,dz$$

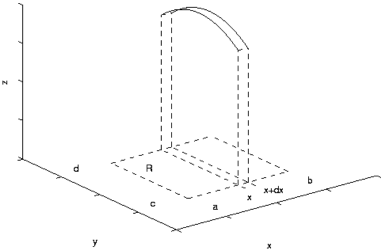
Satz (Elementare Eigenschaften)

- $\iint\limits_B f(x,y) + g(x,y)dF = \iint\limits_B f(x,y)dF + \iint\limits_B g(x,y)dF.$
- $\iint\limits_B \lambda f(x,y)dF = \lambda \iint\limits_B f(x,y)dF$, falls $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant.
- $\iint\limits_B f(x,y)dF \leq \iint\limits_B g(x,y)dF$, falls $f \leq g$.
- $\left| \iint\limits_B f(x,y)dF \right| \leq \iint\limits_B |f(x,y)|dF.$
- $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ enthalten in endlich vielen glatten Kurven:

  $\iint\limits_B f(x,y)dF = \iint\limits_{B_1} f(x,y)dF + \iint\limits_{B_2} f(x,y)dF.$
- In 3D, 4D alles analog ...

Berechnung durch Mehrfach-Integration





$\rightsquigarrow$ Berechnung durch Summation von Querschnittsflächen

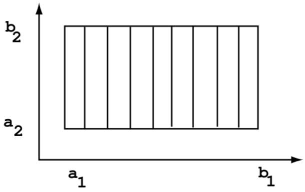
Beispiel in 2D: Rechteck

Sei

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

und $f : R \to \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iint_R f(x,y)\,dF = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



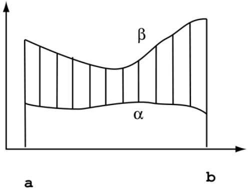
Satz 112 (Mehrfach-Integration 2D)

Seien $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$,

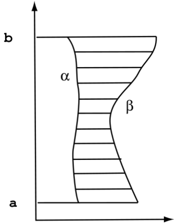
$$B = \{ (x, y) \mid x \in [a, b], \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$$

und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x, y) dF = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Durch Vertauschen der Variablen kann man auch in x–Richtung krummlinig begrenzte Normalbereiche integrieren. Andere Bereiche muss man zerlegen.



Satz 115 (Mehrfach-Integration 3D)

Seien $B^* \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $\alpha, \beta\colon B^* \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\alpha \leq \beta$,

$$B = \{\, (x, y, z) \mid (x, y) \in B^*, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \,\}$$

und $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dV = \iint_{B^*} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dF.$$

Durch Vertauschen der Variablen kann man auch andere Normalbereiche integrieren. Andere Bereiche muss man zerlegen.