Analysis II f. Ingenieure

18. Vorlesung 16.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 99 (Kurvenintegral von Vektorfeldern)

Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}\colon [a,b] \to G$ definiert man das Kurvenintegral durch

$$\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds} := \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \underbrace{\dot{\vec{x}}(t) dt}_{=:\vec{ds}}.$$

Das Kurvenintegral hängt nur von der Kurve ab und nicht davon, wie sie durchlaufen wird. Nur das Vorzeichen ändert sich, wenn man die Durchlaufrichtung ändert.

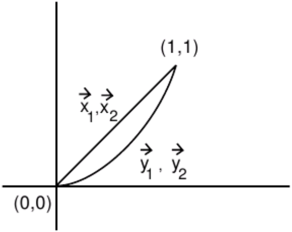
Beispiel

Beispiel 106. Sei $\vec{F}(x,y) = (x^2y, x+y)$.

Wir betrachten vier Kurven zwischen $(0,0)$ und $(1,1)$, nämlich

$$\vec{x}_1(t) := (t,t), \quad \vec{x}_2(t) := (1-t, 1-t),$$
$$\vec{y}_1(t) := (t,t^2), \quad \vec{y}_2(t) := (\sqrt{t}, t)$$

für $0 \le t \le 1$.



Satz 103

Falls $\vec{x}\colon [a,b] \to G$ und

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} u$$

so gilt

$$\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = u(\vec{x}(a)) - u(\vec{x}(b)).$$

Das Kurvenintegral von Potential– bzw. konservativen Feldern ist insbesondere wegunabhängig, d.h., es hängt nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve $\vec{x}$ ab.

Satz 104

Sind alle Kurvenintegrale eines Vektorfeldes wegunabhängig, so ist das Vektorfeld ein Potentialfeld.

Definition (Kurvenintegral von skalalaren Funktionen)

Für ein stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}\colon [a,b] \to G$ definiert man das Kurvenintegral durch

$$\int_{\vec{x}} f\,ds := \int_a^b f(\vec{x}(t))\,\underbrace{|\dot{\vec{x}}(t)|\,dt}_{=:ds}.$$

Das Kurvenintegral hängt nur von der Kurve ab und nicht davon, wie sie durchlaufen wird.

Satz (Bogenlänge einer Kurve)

Für eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}\colon [a,b] \to G$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$\mathrm{L}(\vec{x}) = \int_{\vec{x}} 1\,ds := \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\,dt$$

Beispiel: Archimedische Spirale

$$\vec{x}(t) = r(1-t)\begin{pmatrix}\cos(\pi\, t)\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix}$$

$$t \in [0,1]$$