Analysis II f. Ingenieure

17. Vorlesung 13.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

13. Dezember 2010

Beobachtung

Sei $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = \vec{0}.$$

Definition 86 (Potential / Potentialfeld)

Sei $\vec{\boldsymbol{v}}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Gibt es $\boldsymbol{u}\colon G \to \mathbb{R}$, sodass

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = -\vec{\boldsymbol{v}},$$

so heißt $\boldsymbol{u}$ Potential von $\vec{\boldsymbol{v}}$ und $\vec{\boldsymbol{v}}$ Potential– oder konservatives Feld.

Satz 87 & 89 (Potentialbedingung)

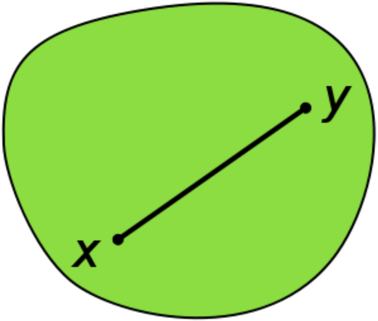
G offen, $\vec{\boldsymbol{v}}\colon \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \supset G \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ stetig differenzierbar:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \text{ Potentialfeld} \quad \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{v}} = 0 \\ \text{und } G \text{ konvex} \end{array}$$

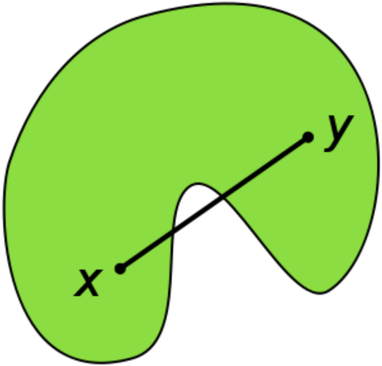
(Beliebige Dimension: $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{v}} \overset{!}{=} 0$ durch $\frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial x_i} \overset{!}{=} \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_j}$ ersetzen.)

Konvexe Mengen

Konvex

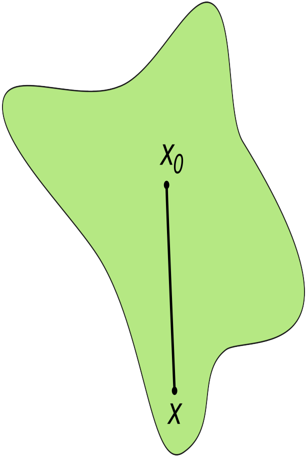


Nicht konvex

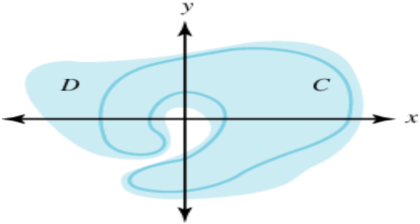


Sternförmig und Einfach-Zusammenhängend

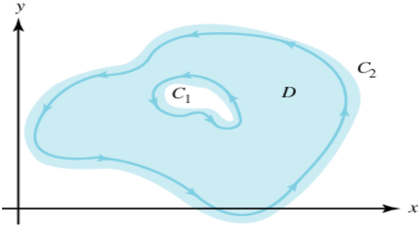
Sternförmig



Einf. Zusammenhängend



Nicht Einf. Zusammenhängend



Beobachtung

Sei $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0.$$

Definition (Vektorpotential)

Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^{3} \supset G \to \mathbb{R}^{3}$ ein Vektorfeld. Ein Vektorfeld $\vec{w}\colon G \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v},$$

heißt Vektorpotential von $\vec{v}$.

Satz 92

G offen, $\vec{v}\colon \mathbb{R}^{3} \supset G \to \mathbb{R}^{3}$ stetig differenzierbar:

$$\vec{v} \text{ besitzt Vektorpotential} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \Longleftarrow \ \text{und } G \text{ konvex} \left(\begin{array}{l}\text{sternförmig,}\\ \text{einfach zusammenhängend}\end{array}\right) \end{array}$$

Kanonische Zerlegung eines Vektorfelds (Teil II)

Satz. (Kanonische Zerleung von Vektorfeldern)

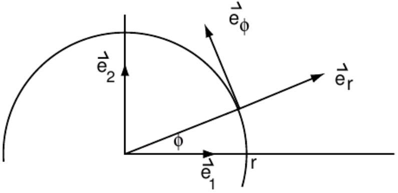
Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar und für ein geeignetes $R > 0$ gelte $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $|\vec{x}| \geq R$.

Dann existieren ein $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und ein $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\boxed{\vec{u} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \vec{w}}$$

Differentiation in Nicht-Euklidischen Koordinaten

Beispiel Polarkoordinaten



- $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Differentialoperatoren in Polarkoordinaten

- $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \tfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\phi = \tfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

- $$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin\phi,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho}\sin\phi, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\cos\phi.$$

- $$\operatorname{grad} u = \tfrac{\partial u}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial u}{\partial\phi}\vec{e}_\phi,$$
$$\operatorname{div}\vec{v} = \tfrac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \tfrac{1}{\rho}v_\rho, \quad \vec{v} = v_\rho\vec{e}_\rho + v_\phi\vec{e}_\phi$$

- Ähnliche Formeln in Zylinder– und Kugelkoordinaten im Skript (dann auch Formeln für die Rotation).

Der Laplace-Operator

Definition: Laplace–Operator

$$\Delta u := \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Anwendungen in der Technik

- Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

- Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \Delta u$$

- Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta \phi = -\rho.$$

(Elekrisches Feld ϕ induziert von Raumladungsdichte ρ)

Beispiel Wärmeausbreitung

Rechteckige Platte, linke Kante isoliert, alle anderen Kanten auf 0 Grad Celsius.