16. Vorlesung 09.12.10

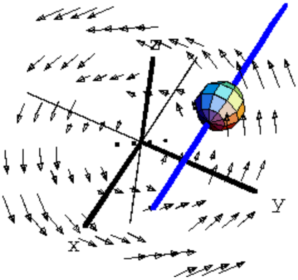
Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Physikalische Bedeutung der Rotation

- Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ = Geschwindigkeitsfeld einer Strömung
- Gegeben: Position $\vec{x}$ im Strömungsfeld
  $\vec{a}$ Einheits-Richtungsvektor
- $B_h(\vec{x})$ = (Masseloser) Testballon, Radius h, Mittelpunkt $\vec{x}$, Drehachse $\vec{a}$
- Reibung an der Oberfläche von B
  $\rightsquigarrow$ B rotiert .



$$\boxed{\lim_{r\to 0} \frac{\text{Drehfrequenz von } B_r(\vec{x})}{\text{Oberfläche von } B_r(\vec{x})} = \langle \operatorname{rot} v(\vec{x}), \vec{a} \rangle .}$$

Kanonische Zerlegung von (Ableitungs-) Matrizen

Matrix-Fall. Gegeben $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A^* + A^\#$$

Mit A^* symmetrisch und $(A^\#)^T = -A^\#$ antisymmetrisch

$$\rightsquigarrow A^\# \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$$

Vektorfeld-Fall. Gegeben $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$du(\vec{x}) = \frac{1}{2}(du + du^T) + \frac{1}{2}(du - du^T) = du^* + du^\#$$

Mit du^* symmetrisch und $(du^\#)^T = -du^\#$ antisymmetrisch

$$\rightsquigarrow \boxed{du^\# \vec{x} = \operatorname{rot}(\vec{u}) \times \vec{x}}$$

Quellenfrei und Wirbelfrei

Definition

- $\vec{v} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *'quellfrei'* (oder auch *'inkompressibel'*), falls
$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$
- $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *'wirbelfrei'*, falls
$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = 0$$

Beispiele: $\vec{v} = \mathrm{rot}(\vec{u})$ quellfrei und $\vec{v} = \nabla\phi$ wirbelfrei.

Satz. (Kanonische Zerleung von Vektorfeldern)

Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar. Dann existieren ein $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und ein quellfreies $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\boxed{\vec{u} = \nabla\phi + \vec{v}}$$

Kanonische Zerlegung von Vektorfeldern (Forts.)

Eigenschaften der Kanon. Zerlegung

Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar s.d.

$$\boxed{\vec{u} = \nabla\phi + \vec{v}}$$

mit $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ quellfrei.

- $du^* = \nabla^2\phi; \quad du^\# \vec{x} = \mathrm{rot}(\vec{v}) \times x$.
- $\mathrm{div}\, \vec{u} = \mathrm{div}(\nabla\phi)$ und $\mathrm{rot}(\vec{u}) = \mathrm{rot}(\vec{v})$.
- $\nabla\phi$ heißt *'Quellanteil'* von $\vec{u}$.
- $\vec{v}$ heißt *'Wirbelanteil'* von $\vec{u}$.

Anwendungen von grad, div, rot in der Technik

- Kraft auf Punktladung e in $\vec{x}$ in elektr. Potentialfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}_{\vec{x}}\phi$$

- Änderungsrate für Dichteverteilung $\vec{x} \mapsto \rho(t, x)$ durch Strömung

$$\dot{\rho}(\vec{x}) = -\mathrm{div}(\rho\vec{v})(\vec{x})$$

- Magnetfeld induziert von Ladungsfluss $\vec{j}$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}(\vec{j})$$

Grad, Div, Rot in anderen Koordinaten

Beispiel Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z, \\
\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}v_\rho, \\
\operatorname{rot} \vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\phi + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho}v_\phi\right)\vec{e}_z, \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$