15. Vorlesung 06.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition (Klassische Differentialoperatoren)

- Nabla: $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T.$
- Gradient: $\mathbf{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T.$
- Divergenz: $\mathbf{div}\, \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$, $\vec{v} \colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$.

  Gilt $\mathbf{div}\, \vec{v} = 0$, so heißt $\vec{v}$ quell– oder divergenzfrei.
- Rotation: $\mathbf{rot}\, \vec{v} := \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, $\vec{v} \colon \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}^3$.

  Gilt $\mathbf{rot}\, \vec{v} = 0$, so heißt $\vec{v}$ wirbel– oder rotationsfrei.

Produktregeln

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$.

- $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$
  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
- $\operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}$
  $\nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f\nabla \cdot \vec{v}$.

$n = 3$:

- $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}$
  $\nabla \times (f\vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f\nabla \times \vec{v}$
- $\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = (\operatorname{rot} \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}$
  $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w})$

Physikalische Bedeutung der Divergenz

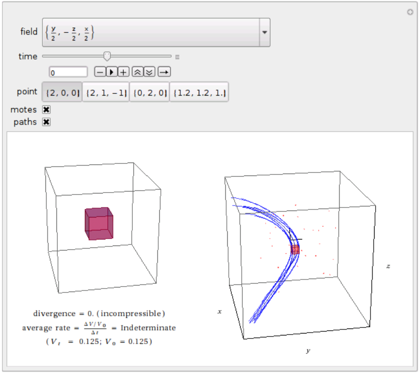
- Vektorfeld $\vec{v} : R^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
  = Geschwindigkeitsfeld einer (stationären) Strömung.
- Zu $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sei $Q_h(\vec{h})$ Würfel mit Kantenlänge $h > 0$ und Mittelpunkt $\vec{x}$.
- Für $t \geq 0$ sei $Q_h(\vec{x}, t)$ die *'Blase'*, die durch Fliessen von $Q_h(\vec{x})$ mit der Strömung entstanden ist.
- Dann ist

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v})(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{Vol(Q_h(\vec{x}, t)) - Vol(Q_h(\vec{x}))}{Vol(Q_h(\vec{x}))}}$$

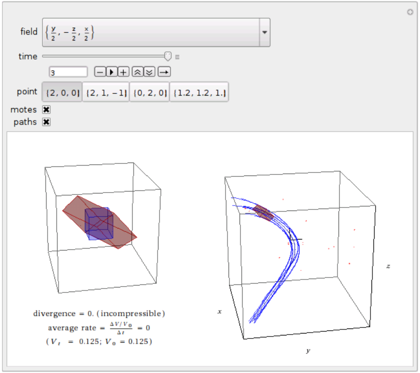
$\rightsquigarrow$ Divergenz = Relative Volumenänderung von Volumenelementen die gemäß Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ durch den Raum strömen.

Beispiel

t=0:



t=3:



Quelle: http://demonstrations.wolfram.com/ExpansionAndDivergence/