14. Vorlesung 02.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 69 (Lagrange–Methode)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Wenn $\boldsymbol{f}$ in $\vec{\boldsymbol{x}} \in G$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$ hat, dann

Fall 1: gibt es ein $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathrm{grad}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\lambda}\, \mathrm{grad}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\, \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0},$$

oder

Fall 2:

$$\mathrm{grad}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\, \boldsymbol{g} = 0, \qquad \boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}.$$

Der Faktor $\boldsymbol{\lambda}$ aus Fall 1 heißt Lagrange–Multiplikator.

Bezeichnung

Falls einer der beiden Fälle in $\vec{\boldsymbol{x}}$ eintritt, heißt $\vec{\boldsymbol{x}}$ *'kritisch(-er Punkt)'*.

Alternative Formulierungen

Variante 2 (Bedingungen an grad f).

Ein Punkt $\vec{x}$ mit $g(\vec{x}) = 0$ heißt kritisch falls $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = 0$ oder $\mu \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \operatorname{grad}_{\vec{x}} g$, für ein geeignetes $\mu \in \mathbb{R}$.

Variante 3 (Symmetrische Bedingungen an grad f und grad g).

Ein Punkt $\vec{x}$ mit $g(\vec{x}) = 0$ heißt kritisch falls $\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = 0$ oder $\operatorname{grad}_{\vec{x}} g = 0$ oder falls $\mu \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \operatorname{grad}_{\vec{x}} g$, für ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Variante 4 (Ohne Multiplikator.)

Ein Punkt $\vec{x}$ mit $g(\vec{x}) = 0$ heißt kritisch falls dort

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

Alle diese Formulierungen sind äquivalent. Insbesondere ist der Zahlwert von λ bzw. μ irrelevant (vergl. Variante 4).

Beispiel

Gegeben: Punkt $\vec{q} = (2,2,2) \in \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + y^2$.
Gesucht: Minimaler Abstand von $\vec{q}$ zum Funktionsgraphen von h.

$\rightsquigarrow$ Zielfunktion (Quadrat des Abstands von (x,y,z) zu $\vec{q}$)

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

und Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0.$$

Lagrange-Bedingung für krit. Punkte x_*: Es ex. ein $\lambda_* \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla g(\vec{x}_*) \quad \& \quad g(x_*) = 0.$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-2) \\ 2(z-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \;\&\; x^2 + y^2 = z}$$

(Gleichungen (1)-(3) (zeilenweise) und (4).)

Division $\frac{(1)}{(3)} \rightsquigarrow \frac{x-2}{z-2} = -2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{2z-3}$; analog $\frac{(2)}{(3)} \rightsquigarrow y = \frac{2}{2z-3}$.
Einsetzen in (4) $\rightsquigarrow (\frac{2}{2z-3})^2 + (\frac{2}{2z-3})^2 = z \Leftrightarrow z(2z-3)^2 = 16$

Beispiel (Forts.)

Cardano-Formeln für Gleichung 3. Grades

$$\rightsquigarrow z_* = \frac{1}{2}\left(2 + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{1/3} + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{1/3}\right) \approx 2.41$$

Rückeinsetzen für x, y

$$\rightsquigarrow x_* = y_* = \frac{2}{-1+\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/3}+\left(7+4\sqrt{3}\right)^{1/3}} \approx 1.098$$

Funktionswert von f an krit. Stelle $\vec{x}_*$

$$\begin{aligned} f(x_*, y_*, z_*) &= (x_* - 2)^2 + (y_* - 2)^2 + (z - 2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(-2 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3})^2 \\ &\quad + 2(2 - \frac{2}{-1 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3}})^2 \\ &\approx 1.76 \end{aligned}$$

(Bem.: λ_* kann aus x_* und (1) bestimmt werden, hier irrelevant.)
(x_*, λ_*) ist die einzige Lösung, d.h. $\vec{x}_*$ ist der einzige kritische Punkt.
Wegen $f(x, y, z) \to \infty$ für $x, y, z \to \infty$ muss $\vec{x}_*$ Minimalstelle sein.

Bemerkung zur Wahl der Funktion g

Beispiel: Finde Minimum der Funktion $f(x,y) = x(1+y)$ für $\vec{x} = \binom{x}{y}$ aus dem Einheitskreis $S_1(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^2$.
Beachte: Unendlich viele Möglichkeiten, den Einheitskreis $S^1(\vec{0})$ als Null-Niveaumenge $\{g = 0\}$ einer Funktion darzustellen, z.B.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \text{oder} \quad \tilde{g}(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$$

$\rightsquigarrow$ Mehrere Ansätze in der Lagrange-Methode möglich
Beispiel: (Lagrange-Ansatz mit g)

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla g(\vec{x}_*) \quad \& \quad g(x_*) = 0.$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \lambda \binom{y-1}{x} = \binom{2x}{2y} \;\&\; x^2 + y^2 = 1}$$

Bestimmung der Lösungsmenge: Drei Paare von Lösungen $(\lambda_*, \vec{x}_*)$. $\rightsquigarrow$ drei kritische Stellen

$$\vec{x}_*^{(1)} = (0,1),\ \vec{x}_*^{(2)} = (-\tfrac{1}{2}, \sqrt{\tfrac{3}{4}}),\ \vec{x}_*^{(3)} = (-\tfrac{1}{2}, -\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$

Vergleich der Funktionswerte $\rightsquigarrow$ $\vec{x}_*^{(2)}$ Minimalstelle, $\vec{x}_*^{(3)}$ Maximalstelle.

Beispiel (Forts.): Selbe Aufgabe, doch diesmal Lagrange-Ansatz mit $\tilde{g}$:

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla \tilde{g}(\vec{x}_*) \quad \& \quad \tilde{g}(x_*) = 0.$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2+y^2-1)2x \\ (x^2+y^2-1)2y \end{pmatrix} \ \& \ (x^2+y^2-1)^2 = 0}$$

Bestimmung der Lösungsmenge: Unendllich vielen Lösungen der Form

$$(\lambda_*, \vec{x}_*) = (0, \vec{x}), \quad \text{falls } \vec{x} \in S_1(\vec{0}) \text{ d.h. falls } x^2 + y^2 = 1.$$

Jeder zulässige Punkt $\vec{x} \in S_1(\vec{0})$ ist ein kritischer Punkt $\vec{x}_*$, d.h. inbsesondere unendlich viele kritische Stellen. Vergleich aller zugeh. Funktionswerte (häufig) nicht durchführbar.)$\leadsto$ Lagrange-Methode mit $\tilde{g}$ liefert keinen Informationsgewinn!.)

Zur Verbesserung der Lagrange-Methode:

$$\boxed{\leadsto \text{Wähle } g \text{ so, dass } \{\nabla g = \vec{0}\} \cap \{g = 0\} \text{ möglichst 'klein'!}}$$