13. Vorlesung 29.11.10

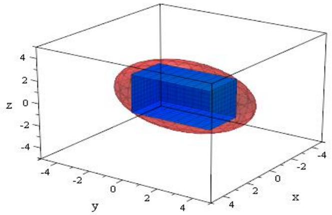
Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Extrema unter Nebenbedingunen

Beispiel: Finde Volumen-maximalen Quader innerhalb des Ellpsoids $E = \{\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.



Klar: Die acht Eckpunkte liegen am besten auf dem Rand von E.

$\rightsquigarrow$ Teil-Problem im 1. Quadranten $\{x > 0, y > 0, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$:

Diagonal-Eckpunkt habe die Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$.

$\rightsquigarrow$ Volumen-Funktion $f(x, y, z) = 8xyz$

$\rightsquigarrow$ Nebenbedingung $g(x, y, z) \stackrel{!}{=} 0$ mit $g(x, y, z) = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textit{Finde Maximum von } f \textit{ unter Nebenbedingung } \{g = 0\}!}$

Satz 69 (Lagrange–Methode)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \colon G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Wenn f in $\vec{x} \in G$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ hat, dann

Fall 1: gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{x}} g, \qquad g(\vec{x}) = 0,$$

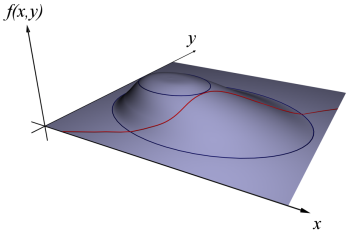
oder

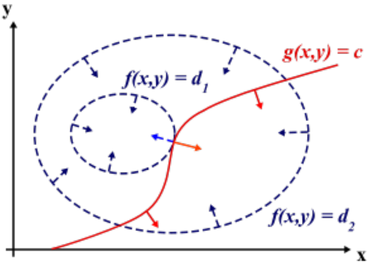
Fall 2:

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}} g = 0, \qquad g(\vec{x}) = 0.$$

Der Faktor λ aus Fall 1 heißt Lagrange–Multiplikator.

Geometrische Bedeutung





- ⇝ Finde alle Niveaus $d \in \mathbb{R}$, so dass zugeh. Niveauline $\{f = d\}$ die Menge der zulässigen Punkte $\{g = c\}$ (tangential) berührt.
- ⇝ Berührpunkte = Kandidaten für lok. Extremstellen von f auf der Menge $\{g = c\}$.

Beispiel (Forts.) – Volumenmax. Quader in Ellipsoid

$$\nabla f(x,y,z) = 8\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} \frac{x}{A} \\ \frac{y}{B} \\ \frac{z}{C} \end{pmatrix}$$

Notw. Bedingung für lok. Extrema $\vec{x}_*$: Es ex. $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \nabla f(\vec{x}_*) &= \nabla g(\vec{x}_*) \\ g(\vec{x}_*) &= 0 \end{aligned}}$$

(Vier Gleichungen für vier Unbekannte x, y, z, λ.) Lösungen:

1. Fall: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$:

$$x_* = \sqrt{\frac{A}{3}}, y_* = \sqrt{\frac{B}{3}}, z_* = \sqrt{\frac{C}{3}}, \lambda = \frac{\sqrt{27}}{12\sqrt{A \cdot B \cdot C}}.$$

2. Fall: $z = 0, \lambda = 0$ und x, y bel. so dass $x^2/A + y^2/B = 1$

3. Fall: $y = 0, \lambda = 0$ und x, z bel. so dass $x^2/A + z^2/C = 1$

4. Fall: $x = 0, \lambda = 0$ und y, z bel. so dass $y^2/B + z^2/C = 1$

Vergleich: $f(\vec{x}_*) > 0$ in Fall 1 und $f(\vec{x}) = 0$ in Fällen 2 – 4.

$$\boxed{\rightsquigarrow \text{Fall 1 liefert Maximum.}}$$

Zusammenfassung Extrema

$$f\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}.$$

- f stetig und G kompakt, dann werden Maximum und Minimum auf G angenommen.
- Lokales Maximum / Minimum im Inneren von G erfüllt $\operatorname{grad} f = 0$.

  Typ des lokalen Extremums über 2. Ableitung.
- Auf dem Rand: auflösen, parametrisieren oder Lagrange–Methode.