12. Vorlesung 25.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition: Hessematrix

Die Matrix

$$Hess_{\vec{x}_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

heißt Hessematrix von f in $\vec{x}_0$.

Definition: Hesseform

Die Abbildung

$$\mathbf{hess}_{\vec{x}_0} f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) := \langle \vec{u}, Hess_{\vec{x}_0} f \cdot \vec{u} \rangle$$

heißt Hesseform von f in $\vec{x}_0$.

Satz 62 (Taylorformel 2. Ordnung)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\vec{x}(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) \subset G$. Dann gibt es ein $t \in]0,1[$, sodass

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x} + t\overrightarrow{\Delta x})\Delta x_i \Delta x_j.$$

Es gilt darüber hinaus

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = \underbrace{f(\vec{x}) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\Delta x_i}^{\mathrm{grad}_{\vec{x}} f \cdot \overrightarrow{\Delta x}} + \frac{1}{2}\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x})\Delta x_i \Delta x_j}^{\overrightarrow{\Delta x}^T f''(\vec{x})\overrightarrow{\Delta x}}}_{\text{Taylorpolynom}} + \text{Fehler}$$

mit

$$\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \to 0} \frac{\text{Fehler}}{|\overrightarrow{\Delta x}|^2} = 0.$$

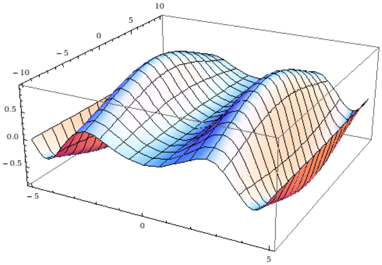
Definition (Extrema)

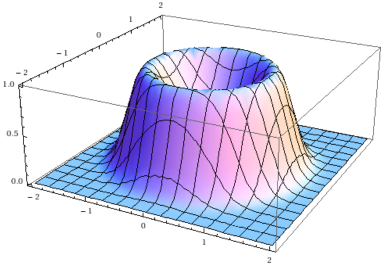
Sei $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$. Dann hat $\boldsymbol{f}$ in $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in G$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), wenn für alle $\vec{x} \in G$ in einer Umgebung von $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ gilt

$$\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}_0) \geq \boldsymbol{f}(\vec{x}) \qquad (\text{bzw.} \quad \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}_0) \leq \boldsymbol{f}(\vec{x})).$$

Sie heißen strikt, falls man $\geq$ durch $>$ (bzw. $\leq$ durch $<$) für $\vec{x} \neq \vec{\boldsymbol{x}}_0$ ersetzen kann, und schwach falls dies nicht möglich ist. Gelten die Ungleichungen auf ganz G so heißt das Extremum global.

Beispiele





2 strikt. glob. Max., 1 Sattelst.
∞-viele strikt. lok. Max. und Min.

Ein strikt. lok. Min.
∞-viele schw. lok. Max.

Notwendiges Kriterium

Satz 63 (notwendiges Kriterium, kritische Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f in einem inneren Punkt $\vec{x}_0$ von G ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann ist

$$\mathrm{grad}_{\vec{x}_0} f = 0.$$

Punkte in denen der Gradient verschwindet heißen kritische Punkte.

Satz 64 (Lokale Extrema: hinreichendes Kriterium)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\vec{x}_0 \in G$ und

$$\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = 0.$$

(i) Gilt $\mathbf{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) > 0$ für alle $\vec{u} \neq 0$, dann hat f in $\vec{x}_0$ ein striktes lokales Minimum.

(ii) Gilt $\mathbf{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) < 0$ für alle $\vec{u} \neq 0$, dann hat f in $\vec{x}_0$ ein striktes lokales Maximum.

(iii) Wechselt $\mathbf{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u})$ für verschiedene $\vec{u}$ das Vorzeichen, dann hat f in $\vec{x}_0$ kein lokales Extremum.

(iv) Sonst liefert dieses Kriterium keine Auskunft.

Die Hesseform heißt im Fall (i) positiv, im Fall (ii) negativ definit, im Fall (iii) indefinit und in den Fällen (iv) positiv bzw. negativ semidefinit.

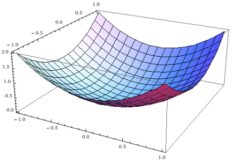
Bedeutung von pos. bzw. neg. bzw. in– definit

Beispiel: Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ setze $f(\vec{x}) = f(x,y) = \langle \binom{x}{y}, A \cdot \binom{x}{y} \rangle$.

Funktionsgraphen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

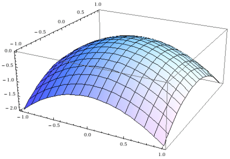
(pos. def.)



$\rightsquigarrow$ *Minimum*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

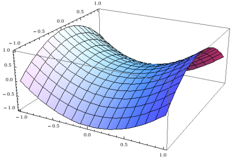
(neg. def.)



$\rightsquigarrow$ *Maximum*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(indef.)



$\rightsquigarrow$ *Sattel*

Satz 65 (Spezialfall 2 Variablen)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $(x_0, y_0) \in G$ und

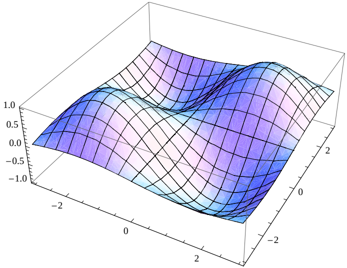
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

(i) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein striktes lokales Minimum.

(ii) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein striktes lokales Maximum.

(iii) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) kein lokales Extremum.

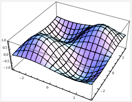
Beispiel: $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$



$$\operatorname{grad}_{(x,y)} \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess}_{(x,y)} \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & \sin(x)(-\sin(y)) \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.): $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$



Kritische Punkte: $\vec{x} = (\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2l+1}{2}\pi)$ bzw. $\vec{x} = (k\pi, l\pi)$, $k, l \in \mathbb{N}$.

$$\det \operatorname{Hess}_{(x,y)} \boldsymbol{f} = \sin^2(x)\sin^2(y) - \cos^2(x)\cos^2(x)$$

In den kritischen Punkten

$$\det(\operatorname{Hess}_{(x,y)} \boldsymbol{f}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (x, y) = (\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2l+1}{2}\pi) \\ & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Extremstelle} \\ -1 & \text{falls } (x, y) = (k\pi, l\pi). \\ & \rightsquigarrow \text{Sattelstelle.} \end{cases}$$

Vorzeichenkriterium für $(\operatorname{Hess}_{(x,y)} \boldsymbol{f})_{11} = -\sin(x)\sin(y)$

$$(\operatorname{Hess}_{(x,y)} \boldsymbol{f})_{11} = \begin{cases} -1 & \text{für} & (x, y) = ((2k + \frac{1}{2})\pi, (2l + \frac{1}{2})\pi) \text{ bzw.} \\ & & (x, y) = ((2k + \frac{3}{2})\pi, (2l + \frac{3}{2})\pi) \\ & & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Maximalstelle, sogar global} \\ +1 & \text{für} & (x, y) = ((2k + \frac{1}{2})\pi, (2l + \frac{3}{2})\pi) \text{ bzw.} \\ & & (x, y) = ((2k + \frac{3}{2})\pi, (2l + \frac{1}{2})\pi) \\ & & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Minimalstelle, sogar global} \end{cases}$$