

Analysis II f. Ingenieure

11. Vorlesung 22.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Höhere Ableitungen

Definition 61

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$. Die **zweiten partiellen Ableitungen** von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}$$

falls $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ nach x_i partiell differenzierbar ist.

Satz von Schwarz

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Satz 62 (Taylorformel 2. Ordnung)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x} \in G$.
Dann gibt es ein $t \in]0, 1[$, sodass

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x} + t \overrightarrow{\Delta x}) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Es gilt darüber hinaus

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j + \text{Fehler}$$

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = \underbrace{f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j}_{\text{Taylorpolynom}} + \text{Fehler}$$

mit

$$\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow 0} \frac{\text{Fehler}}{|\overrightarrow{\Delta x}|^2} = 0.$$

Hesse-Matrix

Bezeichnung

Die Matrix

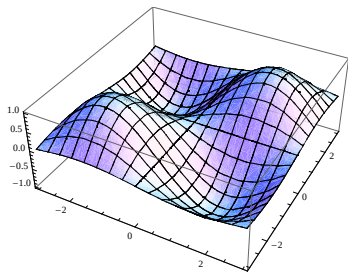
$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

wird auch **Hesse-Matrix** $\text{Hess}_{\vec{x}_0}(f)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (an der Stelle $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$) genannt.

Taylorformel 2.Ordnung – Kurzschreibweise

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta}) \approx f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{\Delta} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\Delta}, \text{Hess}_{\vec{x}}(f) \vec{\Delta} \rangle.$$

Beispiel: $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$



$$\text{grad}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & \sin(x)(-\sin(y)) \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.):

$$\vec{x}_0 = (0, 0),$$

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta}) \approx f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{\Delta} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\Delta}, \text{Hess}_{\vec{x}}(f) \vec{\Delta} \rangle = 0 + 0 + xy$$

