Analysis II für Ingenieure

1. Vorlesung 18.10.10

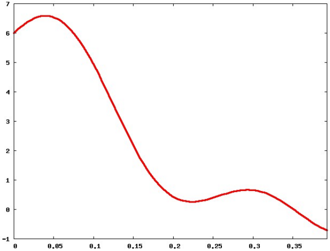
Folien:
Max v. Renesse

nach Vorlagen von

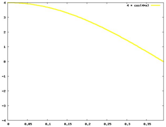
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Fourieranalysis - Die Idee

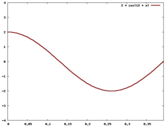


=



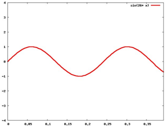
$4\cos(4x)$

+



$2\cos(12x)$

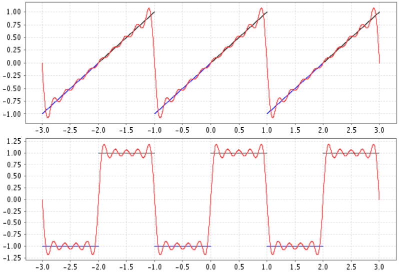
+



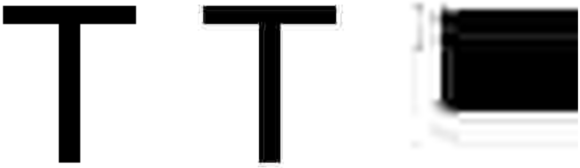
$\sin(26x)$

Anwendungsbeispiele

- “Willkürliche” Spannungen durch harmonische synthetisieren



- Kompressionsverfahren z.B. MP3, JPEG.



'Trigonometrische Polynome'

Trigonometrische Polynome vom Grad n:

$$t_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

mit der **Kreisfrequenz** $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und den **Koeffizienten** $\frac{a_0}{2}, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, für $k = 1, \cdots, n$.

Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt **periodisch mit Periode** T

$$:\Leftrightarrow \quad f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Falls $f : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, so existiert eine eindeutige T**-periodische Forsetzung** $\bar{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine T–periodische Funktion, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Fourierkoeffizienten von f durch

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt.$$

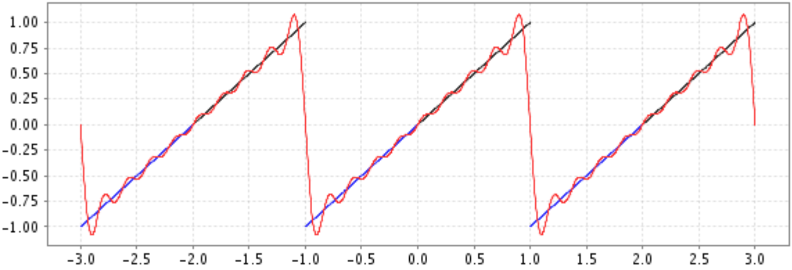
Das Fourierpolynom n–ter Ordnung von f ist

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)).$$

Generalvoraussetzung für die Fourieranalysis

Die Funktion f sei immer stückweise monoton.

Rechenbeispiel: Sägezahnkurve (s. Tafel)



'Orthogonalitätsrelationen'

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gilt:

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \\ 2, & \text{falls } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \text{ oder } k = l = 0 \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \end{cases}$$

Intepretation

Die Funktionen $\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}(\sin k\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}}(\cos k\omega t), k = 1, 2, \cdots\}$ sind eine (vollständige) **Orthonormalbasis** bzgl. dem Skalarprodukt

$$u \bullet v := \int_0^T u(t) \cdot v(t)\,dt$$