Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Vorbereitung auf die Klausur
Fragen zu diesem Blatt können in der Vorlesung am Mittwoch besprochen werden

1. Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(x,y,z) = (x+y+z, -x, x-y, -y-z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -67x_1 & - & 94x_2 & + & 13x_3 & - & 83x_4 & = -2 \\ -32x_1 & + & 74x_2 & - & 28x_3 & + & 54x_4 & = -76 \\ -66x_1 & + & 44x_2 & - & 78x_3 & + & 37x_4 & = 94 \\ 27x_1 & + & 25x_2 & - & 76x_3 & + & 99x_4 & = 30 \end{array}$$

3. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 12 & -10 & -2 & 12 \\ 4 & -4 & -1 & -12 \\ -1 & 2 & -6 & -12 \\ 4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{Z}_3}(4,4)$$
und $b = (-4, 14, 26, 40)^{\mathrm{tr}} \in (\mathbb{Z}_3)^4$. Geben Sie alle Lösungen $x \in (\mathbb{Z}_3)^4$ von $Ax = b$ an.

4. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen, für die gilt: $\ker(g) \cap \operatorname{im} f = \{0\}$. Bestimmen Sie den Rang der Abbildung $g \circ f$.

5. Es seien $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$, $B \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$ und $C \in M_{\mathbb{R}}(m,m)$. Berechnen Sie die Determinante der Blockmatrix
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

6. (a) Bestimmen Sie drei linear abhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, von denen jeweils zwei Vektoren linear unabhängig sind.
   (b) Bestimmen sie in $\mathbb{R}^3$ vier Vektoren, von denen jeweils drei eine Basis bilden.

7. Sei V der Unterraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3. Wir definieren die Abbildung
$$f : p(t) \in V \longrightarrow p(t+1) \in V.$$
   (a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.
   (b) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basis $(1, t, t^2, t^3)$ von $V \subset \mathbb{R}[t]$ an.
   (c) Untersuchen Sie f auf Diagonalisierbarkeit.

8. (a) Sei A die reelle $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A^n = 0$.

(b) Sei $B \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ eine Matrix mit $B \neq 0$ und $B^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

(i) Welche Eigenwerte hat B?

(ii) Zeigen Sie, dass B mindestens einen Eigenvektor besitzt.

9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(3,3).$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T für die $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.