Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Weihnachtliches Zusatzblatt, (*überarbeitet*)
optional, Abgabe 8.1.2020

WZ-1 Zeigen Sie: Eine Gruppe, deren Ordnung eine Primzahl ist, ist zyklisch. Wieviele Untergruppen hat eine solche Gruppe?

WZ-2 $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe. Für $g \in G$ sei i_g der innere Automorphismus $i_g : G \ni x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \in G$, $\mathrm{Inn}(G) = \{i_g \in \mathrm{Aut}(G) \,|\, g \in G\}$, die Menge der inneren Automorphismen und $Z(G) := \{x \in G \,|\, \forall g \in G : x \cdot g = g \cdot x\}$, das *Zentrum von G*. Zeigen Sie

(a) $Z(G)$ und die Mengen $U_g := \{x \in G \,|\, i_g(x) = x\}$ sind Untergruppen von G und $Z(G)$ ist Durchschnitt aller U_g mit $g \in G$.

(b) $Z(G)$ ist Normalteiler in G.

(c) $\mathrm{Inn}(G)$ ist Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$.

(d) $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.
Hinweis: Betrachten Sie den Gruppenhomomorphismus $i : G \ni g \mapsto i_g \in \mathrm{Aut}(G)$.

WZ-3 Wir betrachten einen Homomorphismus $f : V \to W$ von K-Vektorräumen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_V$, wenn $\ker(f) = \{0\}$.
Wir haben also gezeigt: Eine lineare Abbildung besitzt genau dann ein Linksinverses, wenn sie injektiv ist. Gilt eine analoge Aussage für surjektive lineare Abbildungen? Gelten solche Aussagen auch wenn man die Voraussetzung der Linearität weglässt?

WZ-4 $\varphi : V \to W$ sei ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen. Wir definieren für beliebige K-Vektorräume Z eine Abbildung $\varphi_*^Z : \mathrm{Hom}_K(Z, V) \to \mathrm{Hom}_K(Z, W)$ durch $\varphi_*^Z(\sigma) := \varphi \circ \sigma$ (Postkomposition mit φ).

(a) Zeigen Sie, dass dann auch φ_*^Z ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen ist.

(b) Allgemeiner: Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} f_Z : \mathrm{Hom}_K(V, W) &\to \mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{Hom}_K(Z, V), \mathrm{Hom}_K(Z, W)\big) \\ \varphi &\mapsto \varphi_*^Z \end{aligned}$$

also, wie oben,

$$f_Z(\varphi)(\sigma) = \varphi_*^Z(\sigma) = \varphi \circ \sigma$$

ebenfalls ein Vekorraumhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass, falls $V = W$, die Abbildung f_Z sogar ein linearer Ringhomomorphismus

$$f_Z : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K\big(\mathrm{Hom}_K(Z,V)\big)$$

ist. D.h. es gilt zusätzlich

$$f_Z(a \circ b) = f_Z(a) \circ f_Z(b),$$
$$f_Z(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_K(Z,V)}\,.$$

WZ-5 Sie wissen bereits, dass für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen, mit $dim_K(V) < \infty$ die Dimensionsformel

$$\dim_K(V) = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{im} f)$$

gilt.

(a) Gilt auch $V = \ker f + \operatorname{im} f$, oder gar $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$?

(b) Wie steht es mit (a) im Spezialfall $V = W$?

(c) Geben Sie ein explizites Beispiel $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$ und $\ker f \neq \{0\}$ an.

(d) Geben Sie ein explizites Beispiel $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^2 = f \circ f = 0$ und $f \neq 0$ an. Ist hier die Summe aus Kern und Bild direkt?

WZ-6 Es sei V ein K-Vektorraum und $\vartheta : V \to V$ ein Endomorphismus ($\vartheta \in \mathrm{End}_K(V)$) mit der Eigenschaft, dass $\vartheta^2 := \vartheta \circ \vartheta = \mathrm{Id}_V$ gilt. (Eine solche Abbildung nennt man **Involution**.)

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen $E(\vartheta, 1) := \{v \in V \,|\, \vartheta(v) = v\}$ und $E(\vartheta, -1) := \{v \in V \,|\, \vartheta(v) = -v\}$ Untervektorräume sind.

(b) Untersuchen Sie, unter welcher Bedingung an den Körper K die Summe von $E(\vartheta, 1)$ und $E(\vartheta, -1)$ direkt ist, d.h. $E(\vartheta, 1) + E(\vartheta, -1) = E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) \subset V$.

(c) Zeigen Sie, dass, falls in K die 2 (gegeben durch $1 + 1$) multiplikativ invertierbar ist, so gilt sogar $E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) = V$.
Hinweis 1: Sei $x := v \pm \vartheta(v)$. In welcher Relation steht x zu $\vartheta(x)$?
Hinweis 2: Benutzen Sie die Existenz von $\frac{1}{2} := 2^{-1}$ in K um zu zeigen, dass sich jedes $v \in V$ als $v = v_+ + v_-$ mit $v_+ \in E(\vartheta, 1)$ und $v_- \in E(\vartheta, -1)$ schreiben lässt.

(d) Zeigen Sie, dass aus (b) und (c) folgt, dass die Darstellung $v = v_+ + v_-$ sogar eindeutig ist und schreiben Sie den in diesem Fall existierenden Isomorphismus $f : V \to E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1)$ explizit auf.
Wie sieht die Projektion $pr_1 : E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1) \to E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1), (a, b) \mapsto (a, 0)$ mit Bild $E(\vartheta, 1) \times \{0\} \cong E(\vartheta, 1)$ unter diesem Isomorphismus aus: $P_+ := f^{-1} \circ pr_1 \circ f =$? Zeigen Sie $P_+^2 = P_+ \circ P_+ = P_+$. (Eine Abbildung f mit $f^2 = f$ heisst **Projektion**.)

(e) Geben Sie ein Beispiel einer Involution an, für die $E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) \neq V$.

WZ-7 Zeigen Sie, dass jede $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper K in dem 2 invertierbar ist, eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix geschrieben werden kann. D.h. zeigen Sie: zu einem $A \in M(K, n)$ existieren genau zwei Matrizen $A_+ \in \{A \in M(K, n) |\, A^{tr} = A\} =: M(K, n)_+$ und $A_- \in \{A \in M(K, n) |\, A^{tr} = -A\} =: M(K, n)_-$ mit $A = A_+ + A_-$.
Hier ist A^{tr} die Transponierte von $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$. Diese ist definiert durch

$$A^{tr} = (b_{ij})_{i,j=1,...,n},\ b_{ij} := a_{ji}.$$

Explizit ist das im 2×2 Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$M(K, n)$ bezeichnet den K-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Matrizen A_+, A_- im Fall $n = 2$ explizit an:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_+ + A_-.$$

Welche Einträge haben A_+, A_-?
Hinweis: Wie stehen die Einträge einer symmetrischen 2×2-Matrix (bzw. antisymmetrischen 2×2-Matrix) in Relation zueinander?

(b) Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe WZ-6. Was fällt Ihnen auf? Welche Abbildung ist ϑ im vorliegenden Fall?

(c) Für n beliebig gross, nutzen Sie die bisherigen Erkenntnisse um explizite Formeln für A_+ und A_- in Abhängigkeit von A und A^{tr} anzugeben.

(d) Bestimmen Sie die Dimensionen von $M(K, n)_+, M(K, n)_-$ und die Summe dieser Dimensionen.

Bemerkung: In der Aufgabe 5-2 liegt ebenfalls die Situation aus Aufgabe WZ-6 vor. Vergleichen Sie!

WZ-8 Sei nun $K = \mathbb{C}$. Es bezeichne $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Konjugation auf $\mathbb{C}$: $k(x + iy) := x - iy$.

(a) Ist k linear über $\mathbb{C}$? Ist k linear über $\mathbb{R}$?

(b) Wir betrachten, wie gewohnt, $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ via $x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist und ihre Matrix A bzgl. der Standardbasis auf $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kommutiert, d.h. wenn $AJ = JA$ gilt.
Wie müssen die Einträge von A dazu aussehen? Welcher Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht J?

(c) Zeigen Sie, dass die Konjugation $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Involution ist. Bestimmen Sie $E(k, 1)$ und $E(k, -1)$ (definiert wie in Aufgabe WZ-6).