Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 7**

Abgabe: Mittwoch, 4.12. vor der Vorlesung,
bitte Namen, Immatrikulationsnummer und Übungsgruppe (Buchstabe A,B,,...) angeben!

7-1 Untersuchen Sie, welche der folgenden Familien $B = (b_i)_{i=1,2,\dots,r}$ von Vektoren in K^n linear unabhängig sind, bzw. ein Erzeungendensystem ist, bzw. eine Basis ist.

(a) $K = \mathbb{R}, r = 3, n = 3, B = ((3,5,2), (0,1,1), (3,6,2))$.

(b) $K = \mathbb{R}, r = 3, n = 2, B = ((3,5), (0,1), (3,0))$.

(c) $K = \mathbb{Z}_5, r = 3, n = 3, B = (([1],[2],[3]), ([0],[1],[2]), ([3],[1],[4]))$.

(d) $K = \mathbb{C}, r = 2, n = 2, B = ((i, i-1), (1, 1+i))$.

7-2 Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V.

(a) Bestimmen Sie für ein $i \in \{1, \dots, r\}$ alle Vektoren $v \in V$, so dass $\{b_1, \dots, b_{i-1}, v, b_{i+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis ist.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in V$, so dass jeder Basisvektor b_i durch v ersetzt werden kann.

7-3 Sei p eine Primzahl. Für den Körper $K = \mathbb{Z}_p$ betrachten wir den Vektorraum $V = \mathbb{Z}_p^2$.

(a) Wieviele Elemente hat der Vektorraum $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ der Endomorphismen von V?

(b) Wieviele Elemente hat die Automorphismengruppe $\mathrm{Gl}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V)\,;\, f \text{ bijektiv }\}$?

7-4 Sei K ein Körper, wir betrachten den Vektorraum $V = K^2$ und die kanonische Basis (e_1, e_2) mit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = e_1 + \lambda e_2, b_2 = e_2$ für jedes $\lambda \in K$ eine Basis ist.

(b) Bestimmen Sie die zu der Basis B gehörende *Koordinatendarstellung* $\Phi_B : (v_1, v_2) \in K^2 \longmapsto \Phi_B(v_1, v_2) \in K^2$, also die lineare Abbildung mit $\Phi_B(b_j) = e_j, j = 1,2$.