Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 5**

Abgabe: Mittwoch, 27.11. vor der Vorlesung,
bitte Namen, Immatrikulationsnummer und Übungsgruppe angeben!
Am Dienstag, 18.11. wird es einen Aufgabenzettel mit 2 Aufgaben geben, die ebenfalls am Mittwoch, 27.11. abzugeben sind

5-1 Aufgabe 4-4 oder Aufgabe 4-5, je nachdem welche Aufgabe Sie noch nicht gelöst haben.

5-2 Sei $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,;\, f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$

(a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des Vektorraums $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist.

(b) Geben Sie eine lineare Abbildungen $g : V \longrightarrow V$ an, deren Kern der Unterraum U ist.

(c) Geben Sie eine lineare Abbildungen $h : V \longrightarrow V$ an, deren Bild der Unterraum U ist.

5-3 Sei U der Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^5$, der von den Vektoren

$$(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (2, 1, -1, 0, 1)$$

erzeugt wird. Geben sie lineare unabhängige Vektoren an, die den Unterraum U erzeugen.

5-4 Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren eines Vektorraums V über dem Körper K, von denen jeweils $(n-1)$ Vektoren linear unabhängig sind. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $\alpha_i \neq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$, mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.

(b) Wenn $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ sind mit $\beta_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ und wenn $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$, dann gibt es eine Zahl $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, so dass $\beta_i = \lambda \alpha_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$.