Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 4**

Die verschiedenen Versionen bitte ich zu entschuldigen, deshalb kann Aufgabe 4-5 an Stelle von Aufgabe 4-3 gelöst werden, die andere Aufgabe ist dann eine Aufgabe des nächsten Zettels

Abgabe: Mittwoch, 13.11. vor der Vorlesung, bitte Namen, Immatrikulationsnummer und Übungsgruppe angeben!

4-1 Auf $\mathbb{R}^2$ erklären wir die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ durch:

$$\begin{aligned}(x,y)+(u,v) &= (x+u, y+v)\\ (x,y)\cdot(u,v) &= (xu-yv, xv+yu)\,.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.

4-2 Sei K ein Körper und $K[t]$ der zugehörige Ring der Polynome mit Koeffizienten in K. Dann bilden wir die Menge $K(t)$ der rationalen Funktionen der Form $p(t)/q(t)$ mit $p(t), q(t) \in K[t]$ wobei $q(t) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $K(t)$ mit den durch die Rechengesetze in K definierten Verknüpfungen ein Körper ist.

Hinweis: Zwei rationale Funktionen $p(t)/q(t)$ und $r(t)/s(t)$ in $K(t)$ sind gleich, *wenn in $K[t]$ gilt: $p(t)\cdot s(t) = r(t)\cdot q(t)$.*

4-3 K sei ein Körper, n eine natürliche Zahl, dann ist K^n ein Vektorraum. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

(a) $f: K^n \longrightarrow K\,;\ f(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$.
(b) $g: K^n \longrightarrow K\,;\ g(a_1,\ldots,a_n) = a_n - a_1$.
(c) $h: K^n \longrightarrow K\,;\ h(a_1,\ldots,a_N) = a_1^2$.

4-4 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

(a) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^n\,;\ x_1 \geq 0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,;\ x_1+5x_2 = 7x_3\}$.
(c) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,;\ x_2 = x_3^2\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,;\ x_1x_3 = 0.\}$

4-5 *Siehe Erläuterung oben*
Sei $\mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie alle Unterräume des Vektorraums $\mathbb{Z}_2^3$.