Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 3**

Abgabe: Mittwoch, 6.11. vor der Vorlesung, bitte Namen, Immatrikulationsnummer und Übungsgruppe angeben!

3-1 Sei $f : D \longrightarrow M$ eine Abbildung zwischen den Mengen D und M. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf D : $x \sim y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : D/\sim \longrightarrow M\,;\, F([x]) = f(x)$ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G : D/\sim \longrightarrow f(D)\,;\, G([x]) = f(x)$$

bijektiv ist.

(d) Beschreiben Sie die bijektive Abbildung G für die Abbildung$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, f(x) = x^2$.

3-2 Eine Gruppe G heißt *zyklisch,* wenn es ein Element $a \in G$ gibt, so dass für jedes $g \in G$ ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $g = a^n$. Zeigen Sie:

(a) Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

(b) Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.

(c) Welche Untergruppen besitzt $\mathbb{Z}_m$?

3-3 (a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $10^k \equiv 1 \pmod 9$.

(b) Die Quersumme $Q(n)$ einer natürlichen Zahl n ist die Summe ihrer Ziffern im Dezimalsystem. Zeigen Sie, dass $Q(n) \equiv n \pmod 9$.

(c) Ist die Zahl $111\ldots1$ mit 2019 Ziffern durch 9 teilbar?

3-4 Zeigen Sie, dass es keine ganzen Zahlen m, n gibt, für die gilt:

$$3m^2 = n^2 + 1\,.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Gleichung in Bezug auf Teilbarkeit durch 3.