Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 2**

Abgabe: Mittwoch, 30.10. vor der Vorlesung, bitte Namen und Übungsgruppenzeit angeben!

2-1 Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

2-2 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e ihr neutrales Element. Für alle $a \in G$ gelte: $a^2 = a \circ a = e$. Zeigen Sie, dass die Gruppe abelsch ist.

2-3 Sei M eine Menge und $N \subset M$ eine nicht-leere Teilmenge. $S(M)$ und $S(N)$ seien die Permutationsgruppen von M und N. Wir ordnen jedem $f \in S(N)$ eine Abbildung $E_f : M \longrightarrow M$ zu durch

$$E_f(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in N \\ x & ; \quad x \notin N \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $E_f \in S(M)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $E : S(N) \longrightarrow S(M), f \longmapsto E(f) = E_f$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Ist die Abbildung E injektiv?

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung E genau dann surjektiv ist, wenn $N = M$.

2-4 Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen H dieser Gruppe.

Hinweis: Wenn $H \neq \{0\}$ so gibt es ein kleinstes positives Element m in H. Zeigen Sie, dass dann $H = m\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Gruppenhomomorphismen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.