Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Aufgaben, Blatt **Nr. 1**

Abgabe: Mittwoch, 23.10. vor der Vorlesung, bitte Namen und Übungsgruppenzeit angeben!

1-1 Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind:

(a) $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$

(b) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$

(c) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$

1-2 D und M seien zwei Mengen, A, B seien Teilmengen von D und U, V seien Teilmengen von M, $f : D \longrightarrow M$ sei eine Abbildung. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(b) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

(Hier benutzen wir die Notation $f(A) := \{f(x)\,;\, x \in A\}, f^{-1}(U) := \{x \in D\,;\, f(x) \in U\}$)

1-3 Es seien $f : D \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow D$ Abbildungen, so dass für die Komposition $f \circ g$ gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_M$.

($\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$ ist die *identische Abbildung,* d.h. $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$.)

Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv.

(b) g ist injektiv.

(c) Falls f injektiv ist, so ist $g \circ f = \mathrm{id}_D$.

1-4 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$