Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Weihnachtliches Zusatzblatt
optional, Abgabe 8.1.2020

WZ-1 Zeigen Sie: Eine Gruppe, deren Ordnung eine Primzahl ist, ist zyklisch. Wieviele Untergruppen hat eine solche Gruppe?

Lösung. Sei G zunächst eine beliebige endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir betrachten auf G die Äquivalenzrelation $x \sim_H y :\iff x \cdot y^{-1} \in H$ und bezeichnen mit $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wie wir wissen, gilt $gH \cap hH \neq \emptyset \implies gH = hH$, d.h. die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von G. Wir betrachten nun für $g \in G$ die Linkstranslation $L_g : G \ni x \mapsto g \cdot x \in G$. Diese ist eine Bijektion (mit der Inversen $L_{g^{-1}}$) für die offenbar $L_{hg^{-1}}(gH) = hH$ gilt. Also haben alle Äquivalenzklassen die gleiche Anzahl von Elementen, d.h. $|gH| = |H|$ für alle $g \in G$. Da G/H eine Partition von G ist, folgt, dass $|G| = |G/H| \cdot |H|$. Also wird $|G|$ von $|H|$ geteilt. Ist $|G|$ nun eine Primzahl, so folgt $|H| = 1$ oder $|H| = |G|$. Im ersten Fall ist $H = \{e\}$, die triviale Gruppe, im zeiten $H = G$.

Sei nun $x \in G \backslash \{e\}$ und H die von x erzeugte Gruppe, d.h. $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist H offenbar zyklisch. Nach dem eben gezeigten gilt nun $H = \{e\}$ oder $H = G$. Da H mindestens zwei Elemente enthält, nämlich $x \neq e$ und e, muss $H = G$ gelten. Also wird G von x erzeugt und ist damit zyklisch.

WZ-2 $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe. Für $g \in G$ sei i_g der innere Automorphismus $i_g : G \ni x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \in G$, $\mathrm{Inn}(G) = \{i_g \in \mathrm{Aut}(G) \mid g \in G\}$, die Menge der inneren Automorphismen und $Z(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : x \cdot g = g \cdot x\}$, das *Zentrum von* G. Zeigen Sie

(a) $Z(G)$ und die Mengen $U_g := \{x \in G \mid i_g(x) = x\}$ sind Untergruppen von G und $Z(G)$ ist Durchschnitt aller U_g mit $g \in G$.

(b) $Z(G)$ ist Normalteiler in G.

(c) $\mathrm{Inn}(G)$ ist Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$.

(d) $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.
Hinweis: Betrachten Sie den Gruppenhomomorphismus $i : G \ni g \mapsto i_g \in \mathrm{Aut}(G)$.

Lösung. (a) Seien $x, y \in Z(G)$, d.h. es gelte $xg = gx$ und $yg = gy$ für alle $g \in G$. Durch Rechtsmultiplikation mit g^{-1} sehen wir, dass dies äquivalent zu $gxg^{-1} = x$ bzw. $gyg^{-1} = y$ für alle $g \in G$ ist. Bilden wir Inverse, so sehen wir, dass dann auch $gy^{-1}g^{-1} = y^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt, d.h. mit y ist auch $y^{-1} \in Z(G)$. Daher gilt $gxy^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gy^{-1}g^{-1} = xy^{-1}$. Also ist $xy^{-1} \in Z(G)$ und $Z(G)$ damit eine Untergruppe von G.

Nach Definition von i_g gilt offenbar $U_g = \{x \in G \,|\, gxg^{-1} = x\}$. Indem wir die obige Argumentation für das Zentrum so abändern, dass g fixiert ist, erhalten wir analog, dass U_g eine Untergruppe ist.

Nun gilt $Z(G) = \{x \in G \,|\, gxg^{-1} = x \,\forall g \in G\} = \bigcap_{g \in G}\{x \in G \,|\, gxg^{-1} = x\} = \bigcap_{g\in G} U_g$.

(b) Sei $x \in Z(G)$. Wir müssen zeigen, dass für alle $g \in G$ gilt: $gxg^{-1} \in Z(G)$. Nun folgt aus $x \in Z(G)$ aber bereits $gxg^{-1} = x$, also $gxg^{-1} \in Z(G)$ für alle $g \in G$.

(c) Sei $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ und $x \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1}(x) &= \alpha(i_g(\alpha^{-1}(x))) = \alpha(g\alpha^{-1}(x)g) = \alpha(g)\alpha(\alpha^{-1}(x))\alpha(g^{-1}) \\ &= \alpha(g)x\alpha(g)^{-1}\,,\end{aligned}$$

d.h. $\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1} = i_{\alpha(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$. Somit ist $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler.

(d) Das Bild von $i : G \ni g \mapsto i_g \in \mathrm{Aut}(G)$ ist gerade die Menge der inneren Automorphismen. Der Kern ist

$$\begin{aligned}\ker(i) &= \{g \in G \,|\, i_g = \mathrm{Id}_G\} = \{g \in G \,|\, i_g(x) = x \,\forall x \in G\} \\ &= \big\{g \in G \,|\, gxg^{-1} = x \,\forall x \in G\big\} = \big\{g \in G \,|\, xg^{-1}x^{-1} = g^{-1} \,\forall x \in G\big\} \\ &= \big\{g \in G \,|\, xgx^{-1} = g \,\forall x \in G\big\} = Z(G)\,.\end{aligned}$$

Der Homomorphiesatz liefert nun $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{im}\, i \simeq G/\ker i = G/Z(G)$.

WZ-3 Wir betrachten einen Homomorphismus $f : V \to W$ von K-Vektorräumen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_V$, wenn $\ker(f) = \{0\}$.

Wir haben also gezeigt: Eine lineare Abbildung besitzt genau dann ein Linksinverses, wenn sie injektiv ist. Gilt eine analoge Aussage für surjektive lineare Abbildungen? Gelten solche Aussagen auch wenn man die Voraussetzung der Linearität weglässt?

Lösung. Wir beweisen zuerst die Rückrichtung. Sei also $g : W \to V$ eine lineare Abbildung mit $g \circ f = \mathrm{Id}_V$. Da Id_V injektiv ist, ist auch f injektiv (vgl. Aufgabe 1-3). Also gilt $\ker f = \{0\}$.

Es gelte nun $\ker f = \{0\}$, d.h. f sei injektiv. Wir wählen ein Komplement $U \subseteq W$ von $\mathrm{im}\, f$ und definieren

$$\begin{aligned} g : W = \mathrm{im}\, f \oplus U &\to V \\ w_1 + w_2 &\mapsto v\,,\end{aligned}$$

wobei $v \in f^{-1}(w_1) = v + \ker f = v + \{0\} = \{v\}$ das eindeutige Element mit $f(v) = w_1$ ist.

Nach Konstruktion gilt dann $g(f(v)) = v$, d.h. $g \circ f = \mathrm{Id}_V$.

Vollkommen analog kann man zeigen, dass $f : V \to W$ genau dann surjektiv ist, wenn ein lineares $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{Id}_W$ existiert.

Die Aussagen gelten auch, wenn man die Linearität wegfallen lässt. Seien also M, N beliebige nichtleere Mengen. Wir wollen beweisen, dass $f : M \to N$ genau dann injektiv ist, wenn eine Funktion $g : N \to M$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

Es existiere also ein solches g. Dann folgt aus Aufgabe 1-3, dass f injektiv ist. Es sei nun f injektiv. Wir konstruieren g wie folgt. Wir zerlegen N in die disjunkte Vereinigung $N = \operatorname{im} f \cup (N \setminus \operatorname{im} f)$. Sei $x_0 \in M$ beliebig und $g : N \to M$ definiert durch

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{falls } y \in \operatorname{im} f \text{ und } f(x) = y\,, \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$, also $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

Der Beweis, dass $f : M \to N$ genau dann surjektiv ist, wenn ein $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{Id}_W$ existiert, erfordert das sogenannte *Auswahlaxiom*. Es existiere ein solches g. Wiederum folgt aus Aufgabe 1-3, dass f dann surjektiv ist. Sei nun f surjektiv. Dann ist offenbar $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ für alle $y \in N$. Wir wählen für jedes $y \in N$ ein $x_y \in f^{-1}(y)$ (an dieser Stelle benutzen wir das Auswahlaxiom!) und definieren $g : N \to M$ durch $g(y) = x_y$. Dann gilt $f \circ g(y)) = f(x_y) = y$, also $f \circ g = \mathrm{Id}_W$.

WZ-4 $\varphi : V \to W$ sei ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen. Wir definieren für beliebige K-Vektorräume Z eine Abbildung $\varphi_*^Z : \mathrm{Hom}_K(Z, V) \to \mathrm{Hom}_K(Z, W)$ durch $\varphi_*^Z(\sigma) := \varphi \circ \sigma$ (Postkomposition mit φ).

(a) Zeigen Sie, dass dann auch φ_*^Z ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen ist.

(b) Allgemeiner: Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} f_Z : \mathrm{Hom}_K(V, W) &\to \mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{Hom}_K(Z, V), \mathrm{Hom}_K(Z, W)\big) \\ \varphi &\mapsto \varphi_*^Z \end{aligned}$$

also, wie oben,

$$f_Z(\varphi)(\sigma) = \varphi_*^Z(\sigma) = \varphi \circ \sigma$$

ebenfalls ein Vekorraumhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass, falls $V = W$, die Abbildung f_Z sogar ein linearer Ringhomomorphismus

$$f_Z : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K\big(\mathrm{Hom}_K(Z, V)\big)$$

ist. D.h. es gilt zusätzlich

$$\begin{aligned} f_Z(a \circ b) &= f_Z(a) \circ f_Z(b), \\ f_Z(\mathrm{Id}_V) &= \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_K(Z,V)}\,. \end{aligned}$$

Lösung. (a) Zunächst ist zu zeigen, dass $\varphi_*^Z(\sigma)$ linear ist. Das ist aber klar, da $\varphi_*^Z(\sigma) = \varphi \circ \sigma$ und die Verküpfung von linearen Abbildungen wieder linear ist.

Desweiteren muss φ_*^Z als linear nachgewiesen werden. Sei dazu $z \in Z$, $\sigma, \kappa \in \mathrm{Hom}_K(Z, V)$ und $\lambda \in K$.

i. $\varphi_*^Z(\sigma+\kappa)(z) = \varphi \circ (\sigma+\kappa)(z) = \varphi\big(\sigma(z)+\kappa(z)\big) = \varphi\big(\sigma(z)\big)+\varphi\big(\kappa(z)\big) = \varphi_*^Z(\sigma)(z) + \varphi_*^Z(\kappa)(z)$.

ii. $\varphi_*^Z(\lambda\sigma)(z) = \varphi \circ (\lambda\sigma)(z) = \varphi\big(\lambda \cdot \sigma(z)\big) = \lambda\varphi_*^Z(\sigma)(z)$.

Damit ist φ_*^Z K-linear.

Zur Surjektivität von φ_*^Z: Zu einem gegeben $\nu \in \mathrm{Hom}_K(Z, W)$ wollen wir also ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(Z, V)$ finden, sodass $\varphi \circ \sigma = \nu$, das heisst wir wollen das Diagram

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[d, "\nu"'] & V \arrow[dl, "\varphi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

durch ein geeignetes σ komplettieren.

Da φ hier surjektiv ist, ist die Einschränkung $\varphi|_U : U \to W$ für jedes Komplement $U \subset V$ von $\ker\varphi \subset V$ ($V \cong U \oplus \ker\varphi$) ein Isomorphismus. Wir können also σ durch

$$\sigma := i_U \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \nu : Z \to V$$

definieren. Hier bei ist $i_U : U \to V$, $u \mapsto u$ die Inklusion des Unterraums U in V.

Wir prüfen nach:

$$\varphi \circ \sigma = \varphi \circ i_U \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \nu = (\varphi \circ i_U) \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \nu = \varphi|_U \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \nu = \nu,$$

da $\varphi \circ i_U = \varphi|_U$.

(b) Zu zeigen ist also, dass für $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} f_Z(\varphi+\psi) &= (\varphi+\psi)_*^Z = \varphi_*^Z + \psi_*^Z = f_Z(\varphi) + f_Z(\psi), \\ f_Z(\lambda\varphi) &= \cdots = \lambda f_Z(\varphi) \end{aligned}$$

gilt.

Sei also $z \in Z$ und $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(Z, V)$:

i. $f_Z(\varphi+\psi)(\sigma)(z) = \big((\varphi+\psi)\circ\sigma\big)(z) = (\varphi+\psi)\big(\sigma(z)\big) = \varphi\big(\sigma(z)\big) + \psi\big(\sigma(z)\big) = f_Z(\varphi)(\sigma)(z) + f_Z(\psi)(\sigma)(z) = \big(f_Z(\varphi)(\sigma) + f_Z(\psi)(\sigma)\big)(z) = \Big(\big(f_Z(\varphi) + f_Z(\psi)\big)(\sigma)\Big)(z)$.

Die Funktionen $f_Z(\varphi+\psi)$ und $f_Z(\varphi) + f_Z(\psi)$ stimmen also überein.

ii. Der Beweis $f_Z(\lambda\varphi) = \lambda f_Z(\varphi)$ ist analog.

(c) Sein nun also $V = W$. Dann ist die Hintereinanderausführung von Elementen aus $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ bzw. aus $\mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{Hom}_K(Z, V), \mathrm{Hom}_K(Z, V)\big)$ eine Ringmultiplikation.
Seien also $a, b \in \mathrm{End}_K(V)$.

i. $f_Z(a \circ b)(\sigma) = (a \circ b) \circ \sigma = a \circ (b \circ \sigma) = a \circ f_Z(b)(\sigma) = f_Z(a)\big(f_Z(b)(\sigma)\big) = f_Z(a) \circ f_Z(b)(\sigma)$

ii. $f_Z(\mathrm{Id}_V)(\sigma) = \mathrm{Id}_V \circ \sigma = \sigma = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_K(Z,V)}(\sigma)$.

WZ-5 Sie wissen bereits, dass für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen, mit $\dim_K(V) < \infty$ die Dimensionsformel

$$\dim_K(V) = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\mathrm{im}\, f)$$

gilt.

(a) Gilt auch $V = \ker f + \mathrm{im}\, f$, oder gar $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$?

(b) Wie steht es mit (a) im Spezialfall $V = W$?

(c) Geben Sie ein explizites Beispiel $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$ und $\ker f \neq \{0\}$ an.

(d) Geben Sie ein explizites Beispiel $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^2 = f \circ f = 0$ und $f \neq 0$ an. Ist hier die Summe aus Kern und Bild direkt?

Lösung. (a) Da $\ker f \subset V$ und $\mathrm{im}\, f \subset W$ kann man die beiden Räume im Allgemeinen nicht mal addieren, daher ist (a) im Allgemeinen falsch.

(b) Für $V = W$ ist die Summe $\ker f + \mathrm{im}\, f \subset V$ zumindest erklärt. $f : V \to V$ ist also nun eine Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen und daher sind $\ker f, \mathrm{im}\, f$ auch endlichdimensional und die Formel

$$\dim_K(\ker f + \mathrm{im}\, f) = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\mathrm{im}\, f) - \dim_K(\ker f \cap \mathrm{im}\, f)$$

gilt. Also

$$\dim_K(\ker f + \mathrm{im}\, f) = \dim_K(V) - \dim_K(\ker f \cap \mathrm{im}\, f).$$

In diesem Fall ist also

$$\ker f + \mathrm{im}\, f = V \iff \ker f + \mathrm{im}\, f = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f.$$

Es ist allerdings nicht schwierig ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ zu finden, für das $\ker f \cap \mathrm{im}\, f$ nicht trivial ist. Sei dazu $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$ ein Basis von V. Wir geben f auf $\mathcal{B}$ an, nämlich $f(b_1) := b_2$ und $f(b_i) := 0$ für $i = 2, \ldots, n$ und setzten linear fort. Dann ist $\mathrm{im}\, f = \mathrm{span}\{b_2\} \subset \ker f$.
Im Allgemeinen ist also auch hier V nicht die (direkte) Summe aus Bild und Kern.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit einer rellen Zahl $a \neq 0$.
Die Funktion $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ (Matrixmultiplikation) leisted offensichtlich das Gewünschte: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2 = \ker f_A \oplus \operatorname{im} f_A$.

(d) Sei wieder $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer rellen Zahl $a \neq 0$.
Die Funktion $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Bx$ (Matrixmultiplikation) leisted offensichtlich das Gewünschte: $f_B(e_1) = 0$ und $f_B\big(f_B(e_2)\big) = af_B(e_1) = 0$.
Offensichtlich gilt $\mathbb{R}^2 = \ker f_B \oplus \operatorname{im} f_B$ nicht. Es kann auch gar nicht gelten, denn $f^2 = f \circ f = 0$ und $f \neq 0$ implizieren, dass $\operatorname{im} f \subset \ker f$ und $\operatorname{im} f \neq \{0\}$. In diesem Beispiel gilt sogar $\operatorname{im} f_B = \ker f_B$.

WZ-6 Es sei V ein K-Vektorraum und $\vartheta : V \to V$ ein Endomorphismus ($\vartheta \in \operatorname{End}_K(V)$) mit der Eigenschaft, dass $\vartheta^2 := \vartheta \circ \vartheta = \operatorname{Id}_V$ gilt. (Eine solche Abbildung nennt man **Involution**.)

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen $E(\vartheta, 1) := \{v \in V \,|\, \vartheta(v) = v\}$ und $E(\vartheta, -1) := \{v \in V \,|\, \vartheta(v) = -v\}$ Untervektorräume sind.

(b) Untersuchen Sie, unter welcher Bedingung an den Körper K die Summe von $E(\vartheta, 1)$ und $E(\vartheta, -1)$ direkt ist, d.h. $E(\vartheta, 1) + E(\vartheta, -1) = E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) \subset V$.

(c) Zeigen Sie, dass, falls in K die 2 (gegeben durch $1 + 1$) multiplikativ invertierbar ist, so gilt sogar $E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) = V$.
Hinweis 1: Sei $x := v \pm \vartheta(v)$. In welcher Relation steht x zu $\vartheta(x)$?
Hinweis 2: Benutzen Sie die Existenz von $\frac{1}{2} := 2^{-1}$ in K um zu zeigen, dass sich jedes $v \in V$ als $v = v_+ + v_-$ mit $v_+ \in E(\vartheta, 1)$ und $v_- \in E(\vartheta, -1)$ schreiben lässt.

(d) Zeigen Sie, dass aus (b) und (c) folgt, dass die Darstellung $v = v_+ + v_-$ sogar eindeutig ist und schreiben Sie den in diesem Fall existierenden Isomorphismus $f : V \to E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1)$ explizit auf.
Wie sieht die Projektion $pr_1 : E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1) \to E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1), (a, b) \mapsto (a, 0)$ mit Bild $E(\vartheta, 1) \times \{0\} \cong E(\vartheta, 1)$ unter diesem Isomorphismus aus: $P_+ := f^{-1} \circ pr_1 \circ f = ?$ Zeigen Sie $P_+^2 = P_+ \circ P_+ = P_+$. (Eine Abbildung f mit $f^2 = f$ heisst **Projektion**.)

(e) Geben Sie ein Beispiel einer Involution an, für die $E(\vartheta, 1) \oplus E(\vartheta, -1) \neq V$.

Lösung. (a) Wir zeigen, dass $E(\vartheta, 1)$ ein Untervektorraum ist. Der Beweis für $E(\vartheta, -1)$ ist analog.

i. Da $\vartheta(0) = 0$ ist $E(\vartheta, 1) \neq \emptyset$. Also ist $E(\vartheta, 1)$ nicht leer.
ii. Seien $x, y \in E(\vartheta, 1)$. $\vartheta(x + y) = \vartheta(x) + \vartheta(y) = x + y$, also ist $E(\vartheta, 1)$ abgeschlossen unter Addition.
iii. Sei $x \in E(\vartheta, 1)$ und $\lambda \in K$. $\vartheta(\lambda x) = \lambda\vartheta(x) = \lambda x$, also ist $E(\vartheta, 1)$ abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren.

Damit ist $E(\vartheta, 1)$ ein Untervektorraum vom V.
Man beachte, dass die Linearität von ϑ benutzt wurde.

(b) Sei $x \in E(\vartheta, 1) \cap E(\vartheta, -1)$. Es gilt also $\vartheta(x) = x = -\vartheta(x)$ und damit $2\vartheta(x) = 0$. Also gilt entweder $\vartheta(x) = 0$ oder K hat Charakteristik 2, das heisst $2 := 1 + 1 = 0$. Im ersten Fall ist die Summe $E(\vartheta, 1) + E(\vartheta, -1)$ offenbar direkt, da $E(\vartheta, 1) \cap E(\vartheta, -1) = \{0\}$. Im zweiten Fall ist $E(\vartheta, 1) = E(\vartheta, -1)$, da $1 = -1$ in K gilt und die Summe ist somit "maximal indirekt".

(c) Der erste Hinweis liefert $\vartheta(x) = \vartheta\big(v \pm \vartheta(v)\big) = \vartheta(v) \pm \vartheta^2(v) = \vartheta(v) \pm v = \pm x$. Also $v + \vartheta(v) \in E(\vartheta, 1)$ und $v - \vartheta(v) \in E(\vartheta, -1)$.
Offensichtlich gilt $v + \vartheta(v) + v - \vartheta(v) = 2v$. Daraus folgt, dass $v = \frac{1}{2}\big(v + \vartheta(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - \vartheta(v)\big)$ und mit den Definitionen $v_+ := \frac{1}{2}\big(v + \vartheta(v)\big)$ und $v_- := \frac{1}{2}\big(v - \vartheta(v)\big)$ also $v = v_+ + v_-$ mit $v_+ \in E(\vartheta, 1)$ und $v_- \in E(\vartheta, -1)$.

(d) Gemäss (c) gibt es eine Darstellung $v = v_+ + v_-$. Sei $v = \tilde{v}_+ + \tilde{v}_-$ eine zweite solche Darstellung. Es folgt $\tilde{v}_+ - v_+ = \tilde{v}_- - v_- \in E(\vartheta, 1) \cap E(\vartheta, -1)$. Gibt es ein v für das die Darstellung nicht eindeutig ist, so folgt also $\tilde{v}_+ - v_+ \neq 0$ und damit $E(\vartheta, 1) \cap E(\vartheta, -1) \neq \{0\}$, im Widerspruch zu (b), da $2 \in K$ invertierbar ist.
$f : V \to E(\vartheta, 1) \times E(\vartheta, -1)$ ist nun einfach durch $f(v) := (v_+, v_-)$ gegeben. f ist offensichtlich linear und sein Inverses ist durch $(a, b) \mapsto a + b$ gegeben.
v projeziert offensichtlich auf v_+ und nochmaliges Projezieren ändert daran nichts:

$$\begin{tikzcd} v = v_+ + v_- \arrow[r, "P_+"] \arrow[rr, bend left, "P_+^2"] & v_+ = v_+ + 0 \arrow[r, "P_+"] & v_+ \end{tikzcd}$$

Genauer: $P_+(v) = f^{-1} \circ pr_1 \circ f(v) = f^{-1} \circ pr_1\big((v_+, v_-)\big) = f^{-1}\big((v_+, 0)\big) = v_+ = \frac{1}{2}\big(v + \vartheta(v)\big)$ und somit $P_+^2(v) = P_+ \circ P_+(v) = \frac{1}{2}P_+\big(v + \vartheta(v)\big) = \frac{1}{2}P_+(v) + \frac{1}{2}P_+\big(\vartheta(v)\big) = \frac{1}{4}\big(v + \vartheta(v)\big) + \frac{1}{4}\big(\vartheta(v) + \vartheta^2(v)\big) = \frac{1}{4}\big(v + \vartheta(v)\big) + \frac{1}{4}\big(\vartheta(v) + v\big) = \frac{1}{2}\big(v + \vartheta(v)\big) = P_+(v)$.

(e) Gemäss (b),(c) müssen wir $Char(K) = 2$ wählen um ein Beispiel finden zu können. Sei also $K = \mathbb{Z}_2$ als Körper. Die Funktion $\vartheta : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$, $(a, b) \mapsto (b, a)$ liefert ein Beispiel. Hier ist offenbar $E(\vartheta, 1) = E(\vartheta, -1) = \{(0, 0), (1, 1)\} \neq \mathbb{Z}_2^2$.

WZ-7 Zeigen Sie, dass jede $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper K in dem 2 invertierbar ist, eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix geschrieben werden kann. D.h. zeigen Sie: zu einem $A \in M(K, n)$ existieren genau zwei Matrizen $A_+ \in \{A \in M(K, n) |\ A^{tr} = A\} =: M(K, n)_+$ und

$A_- \in \{A \in M(K,n) | \, A^{tr} = -A\} =: M(K,n)_-$ mit $A = A_+ + A_-$.
Hier ist A^{tr} die Transponierte von $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Diese ist definiert durch

$$A^{tr} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \; b_{ij} := a_{ji}.$$

Explizit ist das im 2×2 Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$M(K,n)$ bezeichnet den K-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Matrizen A_+, A_- im Fall $n = 2$ explizit an:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_+ + A_-.$$

Welche Einträge haben A_+, A_-?
Hinweis: Wie stehen die Einträge einer symmetrischen 2×2-Matrix (bzw. antisymmetrischen 2×2-Matrix) in Relation zueinander?

(b) Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe WZ-6. Was fällt Ihnen auf? Welche Abbildung ist ϑ im vorliegenden Fall?

(c) Für n beliebig gross, nutzen Sie die bisherigen Erkenntnisse um explizite Formeln für A_+ und A_- in Abhängigkeit von A und A^{tr} anzugeben.

(d) Bestimmen Sie die Dimensionen von $M(K,n)_+, M(K,n)_-$ und die Summe dieser Dimensionen.

Bemerkung: In der Aufgabe 5-2 liegt ebenfalls die Situation aus Aufgabe WZ-6 vor. Vergleichen Sie!

Lösung. (a) Die Transponierte A^{tr} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist bekanntlich die Matrix

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$A = A^{tr}$ gilt also, wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Also wenn, $b = c$ ist.
Im antisymmetrischen Fall $A = -A^{tr}$, gilt $b = -c$ und $a = d = 0$, da 2

invertierbar ist.
$A = A_+ + A_-$ findet man also indem man aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ x & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$$

x und y ermittelt. Wir lösen also

$$\begin{aligned} b &= x + y \\ c &= x - y \end{aligned}$$

und erhalten $x = \frac{b+c}{2}$ und $y = \frac{b-c}{2}$. Ausgeschrieben ist das

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

was offensichtlich stimmt und eine Darstellung der Form $A = A_+ + A_-$ ist.

(b) Wir schauen genauer hin und vergleichen mit Aufgabe WZ-6. Es fällt uns auf, dass das Transponieren involutiv ist: $(A^{tr})^{tr} = A$. Wir definieren also $\vartheta : M(K, n) \to M(K, n)$ durch $\vartheta(A) := A^{tr}$ und prüfen nach, dass ϑ linear ist. Wir rechen nach:

$$A_+ = \frac{1}{2}\big(A + \vartheta(A)\big) = \begin{pmatrix} a/2 & b/2 \\ c/2 & d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 & c/2 \\ b/2 & d/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$$

und

$$A_- = \frac{1}{2}\big(A - \vartheta(A)\big) = \begin{pmatrix} a/2 & b/2 \\ c/2 & d/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a/2 & c/2 \\ b/2 & d/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Darstellung (1) eindeutig ist.

(c) Die gesuchten Formeln sind also (siehe (b))

$$\begin{aligned} A_+ &:= \frac{1}{2}\big(A + A^{tr}\big) \\ A_- &:= \frac{1}{2}\big(A - A^{tr}\big). \end{aligned}$$

(d) Wir wissen aus Aufgabe WZ-6 bereits, dass $\dim_K \big(M(K,n)\big) = \dim_K \big(M(K,n)_+\big) + \dim_K \big(M(K,n)_+\big)$. Aus der Vorlesung wissen wir auch, dass $\dim_K \big(M(K,n)\big) = n^2$ ist.
Wir überlegen uns, dass bei einer Antisymmetrischen Matrix die n Diagonaleinträge bereits 0 sein mssen. Die verleibenden $n^2 - n$ Koeffizienten der Matrix sind nun aber auch nicht unabhängig. Diejenigen unterhalb der Diagonalen sind das Negative von denjeigen oberhalb der Diagonalen. Insgesamt hat mal also $\frac{n^2-n}{2}$ Freiheitsgrade (wegen $n^2 - n = n(n-1)$, kommt beim Teilen durch 2 hier auch immer eine ganze Zahl raus) und somit $\dim_K \big(M(K,n)_+\big) = \frac{n^2-n}{2}$.
Eine ähnliche Überlegung liefert genauso den Wert $\dim_K \big(M(K,n)_+\big)$. Wir können aber auch einfach rechnen: $\dim_K \big(M(K,n)_+\big) = \dim_K \big(M(K,n)\big) - \dim_K \big(M(K,n)_+\big) = n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

WZ-8 Sei nun $K = \mathbb{C}$. Es bezeichne $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Konjugation auf $\mathbb{C}$: $k(x + iy) := x - iy$.

(a) Ist k linear über $\mathbb{C}$? Ist k linear über $\mathbb{R}$?

(b) Wir betrachten, wie gewohnt, $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ via $x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist und ihre Matrix A bzgl. der Standardbasis auf $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kommutiert, d.h. wenn $AJ = JA$ gilt.
Wie müssen die Einträge von A dazu aussehen? Welcher Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht J?

(c) Zeigen Sie, dass die Konjugation $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Involution ist. Bestimmen Sie $E(k, 1)$ und $E(k, -1)$ (definiert wie in Aufgabe WZ-6).

Lösung. (a) Wir vergleichen $ik(x + iy)$ mit $k\big(i(x + iy)\big)$:

$$\begin{aligned} ik(x + iy) &= i(x - iy) = ix + y \\ k\big(i(x + iy)\big) &= k(ix - y) = -ix - y. \end{aligned}$$

Es gilt also $-ik(x+iy) = k\big(i(x+iy)\big)$ und somit ist k nicht $\mathbb{C}$-linear. (Etwas allgemeiner gilt für komplexe Zahlen w, z $k(wz) = k(w)k(z)$, k ist sogar ein Ringisomorphimus.)
Andererseits gilt

$$\begin{aligned} k(x + iy + u + iv) &= k\big(x + u + i(y + v)\big) = x + u - i(y + v) \\ &= x - iy + u - iv = k(x + iy) + k(u + iv), \\ k\big(r(x + iy)\big) &= k(rx + iry) = rx - iry = r(x + iy) \end{aligned}$$

falls r eine reelle Zahl ist. Also ist k linear über $\mathbb{R}$.

(b) i. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Insbesondere ist f $\mathbb{R}$-linear. Wenn wir nun $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren hat f also eine Matrixdarstellung A_f (bzgl. der Standardbasis $((e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)))$

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die $\mathbb{C}$-Linearität von f impliziert, dass $i(f(z)) = f(iz) \forall z \in \mathbb{C}$. Mit $z = x + iy = (x, y)$ und $iz = i(x + iy) = ix - y = (-y, x)$ folgt also, dass $i\cdot : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear ist und die Matrixdarstellung

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis) hat ($e_1 \mapsto e_2$ und $e_2 \mapsto -e_1$). $i(f(z)) = f(iz)$ entspricht also $JA_f\big((x,y)\big) = A_f J\big((x,y)\big)$.

ii. Sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear und gelte $JA_f = A_f J$. Man rechnet leicht nach, dass

$$JA_f = A_f J \iff a = d,\, b = -c$$

gilt. Also hat A_f die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

und damit ist für $z = x + iy$

$$\begin{aligned} f(z) = f\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{pmatrix} = (a + ic)(x + iy) \\ = wz \end{aligned}$$

mit $w := a + ic$.
Damit ist f nichts anderes als die Multiplikation mit der komplexen Zahl w und daher, wegen der Kommutativität der komplexen Multiplikation, eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.

An dieser Stelle sein angemerkt, dass für $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ überhaupt nur die Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{C}$ in Frage kommt: Wenn wir einen beliebigen Körper K als Vektorraum über sich selbst betrachten, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_K(K,K) \cong K$, $f \mapsto f(1)$ mit Inversem $w \mapsto f_w$ definiert durch $f_w(z) := wz$.

(c) Man sieht sofort, dass $k^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ ist: $k^2(x+iy) = k(x-iy) = x+iy$. Man findet $E(k,1) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} |\, y = 0\} = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $E(k,-1) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} |\, x = 0\} = i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wir haben also die Konjugation k also involutives Element von $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ nachgewiesen und gezeigt, dass $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.