Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Blatt **Nr. 9**

9-1 Gegeben sind $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in K^3$ mit $v, w \neq 0$ und die dadurch bestimmten Linearformen $\omega, \eta \in (K^3)^*$ mit $\omega(x_1, x_2, x_3) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$; $\eta(x_1, x_2, x_3) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$U = \{x \in K^3; \omega(x) = \eta(x) = 0\}.$$

Lösung. Zunächst bemerken wir, dass

$$U = \left\{x \in K^3 \,|\, \omega(x) = 0 \text{ und } \eta(x) = 0\right\} = \ker \omega \cap \ker \eta\,.$$

Weil $v, w \neq 0$ existieren zwei Indizes $i_0, j_0 \in \{1, 2, 3\}$ mit $v_{i_0} \neq 0 \neq w_{j_0}$. Es folgt, dass $\omega(v_{i_0} \cdot e_{i_0}) = v_{i_0}^2 \neq 0$ und $\eta(w_{j_0} \cdot e_{j_0}) = w_{j_0}^2 \neq 0$. Hieraus folgt nun $\dim \operatorname{im} \omega = \dim \operatorname{im} \eta = 1$ und somit $\dim \ker \omega = \dim K^3 - \dim \operatorname{im} \omega = 3 - 1 = 2$ sowie analog $\dim \ker \eta = 2$.

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim U &= \dim(\ker \omega \cap \ker \eta) = \dim \ker \omega + \dim \ker \eta - \dim(\ker \omega + \ker \eta) \\ &= 4 - \dim(\ker \omega + \ker \eta)\,. \end{aligned}$$

Weil die Kerne jeweils zweidimensional sind und in einem dreidimensionalen Raum liegen, kann der letzte Term nur die Werte 2 oder 3 annehmen. Wir werden nun beweisen:

$$\dim(\ker \omega + \ker \eta) = 2 \overset{(i)}{\iff} \omega, \eta \text{ sind lin. abh.} \overset{(ii)}{\iff} v, w \text{ sind lin. abh.}$$

Wir beweisen zunächst (ii): Seien $a, b \in K$. Dann gilt für jedes $1 \leq i \leq 3$, dass $(a\omega + b\eta)(e_i) = a\omega(e_i) + b\eta(e_i) = av_i + bw_i$. Es folgt $av + bw = 0 \iff av_i + bw_i = 0$ für alle $i = 1, 2, 3 \iff (a\omega + b\eta)(e_i) = 0$ für alle $i = 1, 2, 3 \iff a\omega + b\eta = 0$.

Nun beweisen wir $\overset{(i)}{\Longleftarrow}$: Seien $a, b \in K\backslash\{0\}$ mit $a\omega + b\eta = 0$, d.h. $\omega = -(b/a)\eta$ bzw. $\eta = -(a/b)\omega$. Daraus folgt offenbar schon die Behauptung.

Zuletzt beweisen wir $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$: Es gelte $\dim(\ker \omega + \ker \eta) = 2$. Da die Kerne bereits zweidimensional sind, bedeutet dies $\ker \omega = \ker \eta$. Sei (b_1, b_2) eine Basis der Kerne und (b_1, b_2, b_3) eine Vervollständigung zu einer Basis des K^3 sowie $B^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ die duale Basis. Wir stellen ω und η in der Basis B^* dar, $\omega = \sum_{i=1}^3 \alpha_i b_i^*$ sowie $\eta = \sum_{i=1}^3 \beta_i b_i^*$. Nach Definition von b_1, b_2 verschwinden ω und η auf $[(b_1, b_2)]$. Also gilt $\omega = \alpha_3 b_3^*$ und $\eta = \beta_3 b_3^*$. Damit sind ω und η linear abhängig.

Insgesamt erhalten wir also $\dim U = 2$ genau dann, wenn v, w linear abhängig sind und $\dim U = 1$ genau dann, wenn v, w linear unabhängig sind.

9-2 Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W mit der transponierten Abbildung $f^T : W^* \longrightarrow V^*$. Wenn $U \subset V$ ein Unterraum ist, dann heißt $U^0 = \{\omega \in V^*; \omega(x) = 0 \text{ für alle } x \in U\}$ der zu U orthogonale Raum.

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{im} f^T \subset (\ker f)^0$.

(b) Wenn V und W endlich-dimensional sind, dann gilt: $\mathrm{im} f^T = (\ker f)^0$.

Lösung. (a) Sei $\omega \in \mathrm{im}\, f^T$ und $\eta \in W^*$ mit $f^T(\eta) = \eta \circ f = \omega$. Wir müssen zeigen, dass $\omega \in (\ker f)^0$, d.h. dass $\omega(x) = 0$ für alle $x \in \ker f$ gilt. Sei also $x \in \ker f$ beliebig. Dann gilt $\omega(x) = \eta \circ f(x) = \omega(0) = 0$. Also gilt $\omega \in (\ker f)^0$.

(b) Wir beweisen zunächst ein nützliches Lemma, welches wir bereits in der Hörsaalübung gesehen haben.

Lemma. Sei V endlich dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ Untervektorraum. Sei $(v_1, \dots, v_r)$ Basis von U. Wir vervollständigen diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Sei nun $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis. Dann ist $(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)$ Basis von U^0.

Proof. Da $(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)$ als Teilfamilie einer Basis linear unabhängig ist, genügt es $U^0 = [(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)]$ zu zeigen.
<u>"$\supseteq$"</u>: Da $(v_1, \dots, v_r)$ Basis von U ist und für $r+1 \le j \le n$ und $1 \le i \le r$ gilt, dass $v_j^*(v_i) = 0$, folgt $v_{r+1}^*, \dots, v_n^* \in U^0$ und damit $U^0 \supseteq [(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)]$.
<u>"$\subseteq$"</u>: Sei $\omega \in U^0$. Wir stellen ω mittels unserer dualen Basis dar:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^* \,.$$

Wegen $\omega \in U^0$ muss ω auf einer Basis von U veschwinden, also $0 = \omega(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^*(v_j) = \alpha_j$ für jedes $1 \le j \le r$. Es folgt $\omega = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i^*$, also $\omega \in [(v_{r+1}^*, \dots, v_n^*)]$. □

Wir kommen zurück zum Beweis von Aufgabenteil (b). Wir werden der Anschaulichkeit halber zwei Beweise präsentieren. Einen, bei dem wir "zu Fuß" gehen und einen, bei dem wir ein Dimensionsargument benutzen.

<u>Beweisvariante 1</u>:

Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von $\ker f$. Wir vervollständigen diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V und bezeichnen mit $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis. Ferner definieren wir $V_0 := [(v_{r+1}, \dots, v_n)]$. Offenbar gilt

$$V = \ker f \oplus V_0 \,. \tag{1}$$

Damit ist die Einschränkung $f_{|V_0} : V_0 \to W$ injektiv und daher $(w_1, \dots, w_{n-r})$ mit $w_j := f(v_{r+j})$, $j = 1, \dots, n-r$, eine linear unabhängige Familie in W.

Desweiteren gilt wegen (1), dass $\operatorname{im} f = \operatorname{im}(f_{|V_0})$, also ist $(w_1, \dots, w_{n-r})$ schon Basis von $\operatorname{im} f$. Wir vervollstängigen diese zu einer Basis $(w_1, \dots, w_m)$ von W und bezeichen mit $(w_1^*, \dots, w_m^*)$ die duale Basis. Nun gilt offenbar für $1 \le i \le n-r$ und $r+1 \le j \le n$, dass $f^T(w_i^*)(v_j) = w_i^* \circ f(v_j) = w_i^*(w_{j-r}) = \delta_{i,(j-r)}$, d.h.

$$f^T(w_i^*) = v_{i+r}^* \quad \text{für alle } 1 \le i \le n-r\,. \tag{2}$$

Wir haben nun alle nötigen Vorbereitungen getroffen, um endlich $\operatorname{im} f^T \supseteq (\ker f)^0$ zu zeigen. Sei also $\omega \in (\ker f)^0$. Nach obigem Lemma hat ω eine Darstellung der Form $\omega = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i^*$. Wir definieren uns $\eta = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{i+r} w_i^* \in W^*$. Nach (2) gilt nun

$$\begin{aligned} f^T(\eta) = f^T\left(\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{i+r} w_i^*\right) &= \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{i+r} f^T(w_i^*) = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_{i+r} v_{i+r}^* \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i^* = \omega\,. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\omega \in \operatorname{im} f^T$.

Beweisvariante 2: Obiges Lemma zeigt, dass für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt: $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Da wir bereits wissen, dass $\operatorname{im} f^T \subseteq (\ker f)^0$ gilt, folgte aus $\dim \operatorname{im} f^T = \dim (\ker f)^0$ schon $\operatorname{im} f^T = (\ker f)^0$.

Wir erinnern uns daran, dass für jeden Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$ gilt: $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$.

Durch direktes Rechnen erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} f^T &= \dim W^* - \dim \ker f^T = \dim W - \dim (\operatorname{im} f)^0 \\ &= \dim W - (\dim W - \dim \operatorname{im} f) = \dim \operatorname{im} f \\ &= \dim V - \dim \ker f = \dim (\ker f)^0\,, \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile die in der Hörsaalübung bewiesene Identität $\ker f^T = (\operatorname{im} f)^0$ benutzt haben.

9-3 Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W mit transponierter Abbildung $f^T : W^* \longrightarrow V^*$.

Zeigen Sie:

(a) Wenn f surjektiv ist, dann ist f^T injektiv.

(b) Wenn f injektiv ist, dann ist f^T surjektiv.

Lösung. (a) Sei f surjektiv und seien $\omega, \eta \in W^*$ mit $f^T(\omega) = f^T(\eta)$. Daraus folgt dann $f^T(\omega)(v) = \omega \circ f(v) = \eta \circ f(v) = f^T(\eta)(v)$ für alle $v \in V$. Da f nach Voraussetzung surjektiv ist, existiert zu $w \in W$ ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Somit gilt $\omega(w) = \omega(f(v)) = \eta(f(v)) = \eta(w)$. Da $w \in W$ beliebig war, gilt $\omega = \eta$. Also ist f^T injektiv.

(b) Sei f injektiv und $\omega \in V^*$. Wir müssen zeigen, dass ein $\eta \in W^*$ mit $f^T(\eta) = \omega$ existiert.
Sei hierzu $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V mit dualer Basis $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$. Weil f injektiv ist, ist $(w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_i := f(v_i)$, $1 \leq i \leq n$, eine linear unabhängige Familie in W. Wir vervollständigen diese zu einer Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W und bezeichnen mit $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ die duale Basis.
Wir stellen $\omega \in V^*$ in unserer gewählten Basis dar: $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^*$. Nun definieren wir $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i^*$. Dann gilt:

$$f^T(\eta)(v_j) = \eta \circ f(v_j) = \eta(w_j) = \sum_{i_1}^{n} \alpha_i w_i^*(w_j) = \alpha_j = \omega(v_j)\,,$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Weil $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V ist, folgt schon $f^T(\eta) = \omega$. Also ist f^T surjektiv.

9-4 Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten und die lineare Abbildung $D : \sum_{i\geq 0} a_i t^i \in \mathbb{R}[t] \longmapsto \sum_{i\geq 1} i a_i t^{i-1} \in \mathbb{R}[t]$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{i,j}$ dieser Abbildung bezüglich der Basis $\{1, t, t^2, \ldots\}$ von $\mathbb{R}[t]$.

Lösung. Die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ von D bezüglich der Basis $B = (t^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ergibt sich, indem wir $D(t^j)$ in der Basis B darstellen:

$$D(t^j) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_{ij} t^i\,.$$

Nach Definition von D gilt $D(t^0) = 0 = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} 0 \cdot t^i$. Also gilt $a_{i,0} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $D(t^j) = j \cdot t^{j-1}$, also ist $a_{j-1,j} = j$ und $a_{i,j} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \backslash \{j-1\}$.

Insgesamt ergibt sich

$$a_{ij} = \begin{cases} j & \text{falls } i = j-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In Matrixschreibweise hat $A = (a_{ij})_{i,j}$ die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$