Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Blatt **Nr. 8**

8-1 Sei K ein Körper, wir betrachten den Vektorraum $V = K^2$ und die kanonische Basis (e_1, e_2) mit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Dann ist $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = e_1 + \lambda e_2, b_2 = e_2$ für jedes $\lambda \in K$ eine Basis ist, vgl. Aufgabe 7-4.

Bestimmen Sie die Elemente der Dualbasis $B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$.

Hinweis: Gehen Sie aus von dem Ansatz $b_1^* = ae_1^* + be_2^*, b_2^* = ce_1^* + de_2^*$ und benutzen Sie: $b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = e_i^*(e_j)$.

Lösung. Aus dem Ansatz $b_1^* = ae_1^* + be_2^*$, $b_2^* = ce_1^* + de_2^*$ und der Forderung $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ erhalten wir die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a + b\lambda &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} c + d\lambda &= 0 \\ d &= 1\,. \end{aligned}$$

Deren Lösungen lesen wir ab und erhalten $b_1^* = e_1^*, b_2^* = -\lambda e_1^* + e_2^*$. □

8-2 e) Sei V ein endlich–dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v) \neq 0$ existiert.

(b) Seien $x, y \in V$. Zeigen Sie: Es gilt $x = y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow K$ gilt

Lösung. (a) Wir ergänzen v zu einer Basis $(v = b_1, b_2, \ldots, b_n)$ von V. Seien nun $w_1, \ldots, w_n \in W$ mit $w_1 \neq 0$. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung (Satz 2.4.4) gibt es nun eine lineare Abbildung mit $f(b_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere gilt $f(v) \neq 0$.

(b) Es gelte $f(x) = f(y)$ für alle $f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$, d.h. $f(x - y) = 0$ für alle $f \in V^*$. Wäre $x \neq y$, so $x - y \neq 0$ und nach (a) müsste es ein $f \in V^*$ mit $f(x - y) \neq 0$ geben. Also gilt $x = y$.
Die Rückrichtung ist offensichtlich.

□