Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Blatt **Nr. 12**

12-1 Gegeben ist die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\det A_n = -\det A_{n-2}$ für alle $n \geq 3$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist A_n invertierbar?

Lösung. (a) Wir entwickeln $\det A_n$ nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det A_n = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante auf der rechten Seiten entwickeln wir wieder nach der ersten Spalte und erhalten dieses mal

$$\det A_n = -\det A_{n-2} - (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \star & \cdots & \star \end{pmatrix} = -\det A_{n-2}\,.$$

(b) Wegen $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir nach Aufgabenteil (a) $\det A_{2k-1} = 0$ und $\det A_{2k} = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist A_n genau dann invertierbar, wenn n gerade ist.

12-2 Zeigen Sie, dass für $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Lösung. Wir beweisen die Gleichung mittels vollständiger Induktion über n. Für $n = 2$ gilt zunächst

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 \,.$$

Für den Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ formen wir die Determinante zunächst äquivalent um, indem wir für $j = n, n-1, \dots, 1$ (in dieser Reihenfolge) das x_1-Fache der j-ten Zeile von der $(j+1)$-ten Zeile abziehen:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_{n+1}^2 - x_1x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^n - x_1x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^n - x_1x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-1} & \cdots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-1} & \cdots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Nun benutzen wir, dass die Determinante linear in jeder Spalte ist und erhalten, dass obige Determinante gleich

$$\prod_{j=2}^{n+1}(x_j - x_1) \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

ist. Die Induktionsbehauptung liefert das Ergebnis.

12-3 (a) Seien $f, g : V \longrightarrow V$ Endomorphismen des Vektorraums V und sei $v \in v$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und auch ein Eigenvektor von g zum Eigenwert μ. Zeigen Sie: v ist ein Eigenvektor von $g \circ f$ und von $f \circ g$.

(b) Sie $f : V \longrightarrow V$ ein Isomorphismus und $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Zeigen sie: $\lambda \neq 0$ und v ist auch ein Eigenvektor von f^{-1}.

(c) Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und $w \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ. Zeigen Sie: Wenn $v + w$ auch ein Eigenvektor ist von f, dann gilt $\lambda = \mu$.

Lösung. (a) Es gilt $g \circ f(v) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \lambda \mu v$. Somit ist v Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert $\lambda\mu$. Analog ist v auch Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda\mu$.

(b) Da f ein Isomorphismus ist, muss ihr Kern $\ker f$ trivial sein. Aus der Eigenwertgleichung folgt nun sofort, dass kein Eigenwert von f verschwinden kann.

Ist nun $v \neq 0$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so gilt $f(v) = \lambda v$. Indem wir f^{-1} auf beide Seiten der Gleichung anwenden, erhalten wir $v = \lambda f^{-1}(v)$, also $f^{-1}(v) = (1/\lambda)v$.

(a) Nach Annahme ist $v+w$ ebenfalls ein Eigenvektor von f und wir bezeichnen den zugehörigen Eigenwert mit γ. Es gilt also $f(v+w) = \gamma(v+w)$. Da f linear ist und v und w Eigenvektoren von f sind, gilt aber auch $f(v+w) = f(v)+f(w) = \lambda v+\mu w$ und somit $(\gamma-\lambda)v+(\gamma-\mu)w = 0$. Nun ist entweder $\lambda = \gamma = \mu$ oder v und w sind linear abhängig. Dann ist aber w lediglich ein Vielfaches von v und somit $\lambda = \mu$, ein Widerspruch. Also ist in jedem Falle $\lambda = \mu$.

12-4 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Lösung. Mit Hilfe der Sarrusschen Regel erhalten wir für das charakteristische Polynom ohne Probleme

$$\chi_A(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6\,.$$

Wir raten die Nullstelle $X = 1$. Nach einer Polynomdivision sehen wir, dass

$$\chi_A(X) = (X-1)(X^2-5X+6) = (X-1)(X-2)(X-3)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda = 1, \lambda = 2$ und $\lambda = 3$. Da diese paarweise verschieden sind, ist A in jedem Falle diagonalisierbar.

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist

$$\ker(1 \cdot E_3 - A) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = [(1,2,1)]\,,$$

der zum Eigenwert $\lambda = 2$ ist

$$\ker(2 \cdot E_3 - A) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -6 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = [(1,1,0)]$$

und der zum Eigenwert $\lambda = 3$

$$\ker(3 \cdot E_3 - A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -6 & 7 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = [(1,2,2)]\,.$$