Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Blatt **Nr. 11**

11-1 Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen.

Lösung. Wir multiplizieren zunächst die dritte und die fünfte Zeile jeweils mit 3 und erhalten

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 12 & 3 & 6 & 21 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ -12 & 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile auf die anderen Zeilen gelangen wir zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -6 & -7 \\ 0 & -9 & -6 & -11 \\ 0 & 27 & 18 & 37 \end{pmatrix}.$$

Nun addieren wir geeigente Vielfache der zweiten Zeile auf die dritte bis fünfte Zeile. Das Ergebnis ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Indem wir nun noch die dritte Zeile zur vierten addieren und das Fünffache der dritte Zeile von der fünften abziehen, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang dieser Matrix, und damit der Ausgangsmatrix, ist also 3.

11-2 Stellen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen dar.

Lösung. Die angegebene Permutation ist bereits ein Zyklus und wir können direkt mit der Zerlegung in Transpositionen beginnen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

11-3 Sei $A \in M_K(m,n), B \in M_K(n,m)$ und $n < m$. Untersuchen Sie die Invertierbarkeit der Matrix $A \cdot B$.

Lösung. Für eine Matrix $C \in M_K(k,l)$ bezeichne $Z_i(C) \in M_K(1,l)$ die i-te Zeile der Matrix C sowie $S_j(C) \in M_K(k,1)$ die j-te Spalte.

Nach der Formel für die Matrizenmultiplikation gilt für $i \in \{1,2,\ldots,m\}$:

$$Z_i(A \cdot B) = Z_i(A) \cdot B = \sum_{j=1}^{n} Z_i(A)_j \cdot Z_j(B) .$$

Das bedeutet, dass jede Zeile $Z_i(A \cdot B)$ des Produktes $A \cdot B$ eine Linearkombination der Zeilen $Z_j(B)$ von B ist. Es folgt, dass

$$[\{Z_i(A \cdot B) \mid i = 1,\ldots,m\}] \subseteq [\{Z_i(B) \mid i = 1,\ldots,n\}]$$

und damit, dass $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Rang} B$.

Analog gilt für jedes $i \in \{1,2,\ldots,m\}$:

$$S_i(A \cdot B) = A \cdot S_i(B) = \sum_{j=1}^{n} S_i(B)_j \cdot S_j(A) .$$

Es ist also jede Spalte $S_i(A \cdot B)$ des Produktes $A \cdot B$ eine Linearkombination der Spalten $S_j(A)$ von A, woraus

$$[\{S_i(A \cdot B) \mid i = 1,\ldots,m\}] \subseteq [\{S_i(A) \mid i = 1,\ldots,n\}]$$

folgt.

Weil der Zeilenrang einer Matrix gleich ihrem Spaltenrang ist, erhalten wir $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Rang} A$.

Unsere beiden Ungleichungen zusammen genommen bedeuten $\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \min\{\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B\}$.

Da $n < m$ ist, kann der Rang von A und B jeweils höchstens n sein. Gleiches gilt nach unserer Ungleichung dann auch für $A \cdot B$. Da $A \cdot B$ eine $m \times m$-Matrix ist, hat sie also nie vollen Rang und ist damit nicht invertierbar.

11-4 Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ ist die Matrix $A_\sigma = (a_{ij})_{i,j} \in M_K(n,n)$ mit $a_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ definiert. Hier ist $\delta_{ij} \in \{0,1\}$ (mit $\delta_{ij} = 1$ genau dann wenn $i = j$) das *Kronecker-Symbol.*

Bestimmen sie die Determinante $\det A_\sigma$.

Lösung. Wir benutzen zunächst die Leibniz-Formel für die Determinante:

$$\det A_\sigma = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \prod_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \prod_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma(\tau(i))} \,.$$

Nun betrachten wir für ein festes τ das Produkt auf der rechten Seite. Dieses ist nur dann nicht Null, wenn jeder Faktor ungleich Null ist, d.h. wenn $\sigma(\tau(i)) = i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass das Produkt genau dann nicht verschwindet, wenn $\sigma \circ \tau = \mathrm{Id}$ gilt, wenn also $\tau = \sigma^{-1}$ ist. In obiger Summe überlebt also genau ein Summand und wegen $\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$ erhalten wir

$$\det A_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma(\sigma^{-1}(i))} = \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} \delta_{ii} = \operatorname{sgn} \sigma.$$