Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20

Musterlösung, Blatt **Nr. 10**

10-1 Bestimmen Sie für die $(2,2)$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ die $(2,2)$-Matrix B mit

$$AB = BA = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir wissen, dass die invertierbaren Matrizen eine Gruppe bilden bezüglich der Matrizenmultiplikation. Finden wir also ein Rechtsinverses B von A, so ist dies dann automatisch auch Linksinverses. Sei also $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ mit

$$\mathbb{1} = A \cdot B = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Einträge der Matrizen vergleichen, gelangen wir zu folgendem linearen Gleichungssystem.

$$\begin{array}{cccccc} ax & & +bz & & = 1 \\ & ay & & +bu & = 0 \\ cx & & +dz & & = 0 \\ & cy & & +du & = 1 \end{array}$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall $a = 0$: Wegen $ad - bc \neq 0$ folgt, dass $bc \neq 0$ und damit $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Nun können wir die Lösung direkt ablesen: $z = 1/b, u = 0, x = -d/(bc)$ und $y = 1/c$. Für die Matrix B erhalten wir also

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Fall $a \neq 0$: In diesem Fall wenden wir auf das obige lineare Gleichungssystem das Gaußchen Eliminationsverfahren an.

$$\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 1 \\ \hline 1 & 0 & b/a & 0 & 1/a \\ 0 & 1 & 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & d - bc/a & 0 & -c/a \\ 0 & 0 & 0 & d - bc/a & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bc} \end{array}$$

Für die Matrix B ergibt sich also

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Indem wir mit dem ersten Fall ($a = 0$) vergleichen, stellen wir fest, dass die Inverse B von A stets durch diese Formel gegeben ist.

10-2 Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir wenden das Eliminationsverfahren an und erhalten:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Vom letzten Block lesen wir die eindeutige Lösung $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ ab.

10-3 Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y - z + 3t &= -1 \\ 2x + y + z + 4t &= -1 \\ 2x + 3y - 5z + 8t &= -11 \\ -x + y - 5z + t &= -7 \end{aligned}$$

Lösung. Wie schon in der letzten Aufgabe wenden wir das Eliminationsverfahren an:

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\
2 & 1 & 1 & 4 & -1 \\
2 & 3 & -5 & 8 & -11 \\
-1 & 1 & -5 & 1 & -7 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\
0 & -1 & 3 & -2 & 1 \\
0 & 1 & -2 & 2 & -9 \\
0 & 2 & -6 & 4 & -8 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6
\end{array}
$$

An der letzten Zeile erkennen wir, dass das angegebene Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

10-4 Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$. Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung

$$f : M_{\mathbb{R}}(2,2) \longrightarrow M_{\mathbb{R}}(2,2)\,;\; f(A) = BA\,.$$

Lösung. Wir fixieren die Basis $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $M_{\mathbb{R}}(2,2)$, wobei die E_{ij} die Elementarmatrizen $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ sind. Nun berechnen wir die Darstellungsmatrix A der Abbildung f bezüglich der Basis B.

$$
\begin{aligned}
f(E_{11}) = BE_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{11} - 4 \cdot E_{21}\,, \\
f(E_{12}) = BE_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{12} - 4 \cdot E_{22}\,, \\
f(E_{21}) = BE_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot E_{11} + 4 \cdot E_{21}\,, \\
f(E_{22}) = BE_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot E_{12} + 4 \cdot E_{22}\,,
\end{aligned}
$$

woraus

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

folgt. Die Abbildung f hat also den Rang 2.