Seminar zur Differentialgeometrie
Seminarleiter: Enno Keßler
WS 2011/12

Johannes Hilgenfeld, Marlen Dietrich
22.11 2011

Drehflächen und Regelflächen

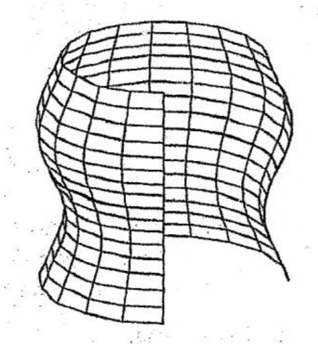
Definition: (Drehfläche)

Eine Fläche heißt Drehfläche oder Rotationsfläche, wenn sie durch Drehung einer regulären, ebenen (C^2-)Kurve (der sogenannten Meridiankurve oder Profilkurve)

$$t \mapsto (r(t), h(t))$$

um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ entsteht, also wenn die eine Parametrisierung der folgenden Form zulässt:

$$f(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$$



Eigenschaften:
- rotationssymmetrisch
- invariant unter allen Drehungen um die z-Achse
- hängt nur von t ab

$$F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Vorstellung: Drehflächen sind aufgebaut aus Kreisen mit Mittelpunkt auf einer festen Achse und einem variablen Radius (und zwar senkrecht zur Achse).

Geometrische Eigenschaften: (falls t nach der Bogenlänge parametrisiert ist: $\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2 = 1$)

(a) 1. Fundamentalform: $I(t,\varphi) = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \dot{r}^2(t) + \dot{h}^2(t) & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$

(b) Einheitsnormale:

$$\nu(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2}} \left(-\dot{h}(t)\cos\varphi, -\dot{h}(t)\sin\varphi, \dot{r}(t)\right) = (-\dot{h}(t)\cos\varphi, -\dot{h}(t)\sin\varphi, \dot{r}(t))$$

(c) 2. Fundamentalform: $II(t,\varphi) = (h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2}} \begin{pmatrix} -\ddot{r}(t)\dot{h}(t) + \dot{r}(t)\ddot{h}(t) & 0 \\ 0 & r(t)\dot{h}(t) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\ddot{r}(t)\dot{h}(t) + \dot{r}(t)\ddot{h}(t) & 0 \\ 0 & r(t)\dot{h}(t) \end{pmatrix}$$

(d) Hauptkrümmung: $\kappa_1 = \frac{\dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t)}{(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2)^{3/2}} = \dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t)$

$$\kappa_2 = \frac{1}{(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2)^{1/2}} * \frac{\dot{h}(t)}{r(t)} = \frac{\dot{h}(t)}{r(t)}$$

(e) Gauß- Krümmung: $K = \kappa_1 * \kappa_2 = \frac{\dot{h}(t)(\dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t))}{r(t)(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2)^2} = \frac{\dot{h}(t)(\dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t))}{r(t)}$

(f) mittlere Krümmung: $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \frac{r(t)(\dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t)) + \dot{h}(t)(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2)}{(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2)^{3/2} r(t)}$

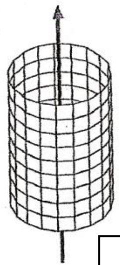
$$= \frac{1}{2}\left(\dot{r}(t)\ddot{h}(t) - \ddot{r}(t)\dot{h}(t) + \frac{\dot{h}(t)}{r(t)}\right)$$

<u>Beispiel:</u> **<u>Drehflächen mit konstanter Krümmung</u>**

Zur Bestimmung der Drehflächen mit konstanter Gauß – Krümmung K suchen wir nach Definition 3.16 alle Lösungen der Differentialgleichung: $r'' + Kr = 0$

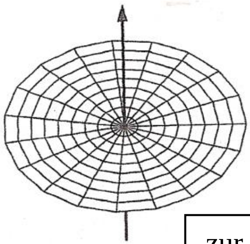
$$\Rightarrow \; r(t) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{K}t) + b\sin(\sqrt{K}t) \;, falls\ K > 0 \\ at + b \;\; mit\ |a| \;\le 1 \,, falls\ K = 0 \\ a\cos h(\sqrt{-K}t) + b\sin h(\sqrt{-K}t) \;, falls\ K < 0 \end{cases}$$

<u>(a) mit verschwindender Gauß – Krümmung</u>: (K= 0)

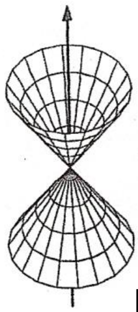


Kreiszylinder

r=b falls a= 0

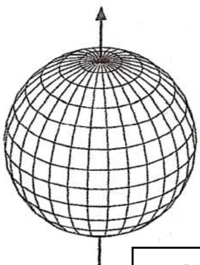


zur Drehachse orthogonale Ebene (falls $|a| = 1$)

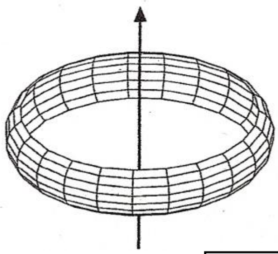


doppelter Kreiskegel (0 < $|a| < 1$)

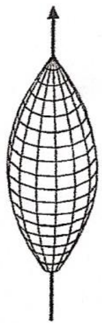
<u>(b) mit konstanter positiver Gauß – Krümmung</u>: (K > 0)



Sphäre ($a^2K = 1$)

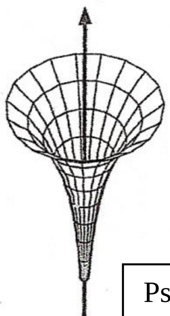


Wulsttyp ($a^2K > 1$)

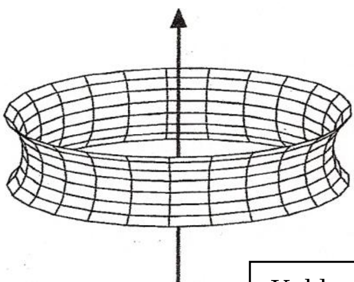


Spindeltyp ($0< a^2 K < 1$)

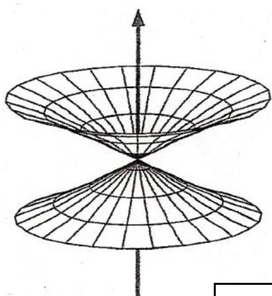
<u>(c) mit konstanter negativer Gauß – Krümmung:</u> (K < 0)



Pseudosphäre (a= b ; K= -1)



Kehltyp ($b^2< a^2$)



Kegeltyp ($b^2 > a^2$)

Definition: (Regelfläche)

Eine Fläche heißt *Regelfläche* oder *gradlinige Fläche*, wenn sie eine (C^2-) Parametrisierung der folgenden Art zulässt:

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u),$$

wobei c eine (nicht notwendig reguläre, aber differenzierbare) Kurve und X ein nirgends verschwindendes Vektorfeld längs c ist.

Satz: In den Standardparametern ist eine Regelfläche $f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u)$ bis auf euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt durch die folgenden drei Größen

$$F = \langle c', X \rangle$$

$$\lambda := \langle c' \times X, X' \rangle = \mathrm{Det}\,(c', X, X')$$

$$J := \langle X'', X \times X' \rangle = \mathrm{Det}\,(X, X', X''),$$

jeweils als Funktion von u. Umgekehrt bestimmt jede Wahl dieser drei Größen eindeutig eine Regelfläche.

Folgerung: Für eine Regelfläche in Standardparametern $f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u)$ ist die erste Fundamentalform die folgende, wobei $\mathrm{Det}\,(I) = \lambda^2 + v^2$:

$$I = \begin{pmatrix} \langle c', c' \rangle + v^2 & \langle c', X \rangle \\ \langle c', X \rangle & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^2 + \lambda^2 + v^2 & F \\ F & 1 \end{pmatrix}$$

Abwickelbare Flächen:

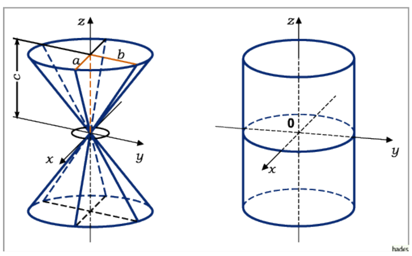
Eine Regelfläche heißt abwickelbar, wenn sie lokal in die Ebene abgebildet werden kann, und zwar unter der Erhaltung der ersten Fundamentalform und unter Erhaltung der erzeugenden Geraden. Die Vorstellung dabei ist, dass man eine der Geraden in die Ebene legt und dann den Streifen rechts und links davon in die Ebene „abwickelt“, und zwar unter Bewahrung von Längen und Winkeln. Eine nicht abwickelbare Regelfläche heißt auch windschief. Für eine Regelfläche sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

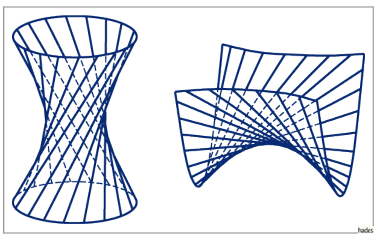
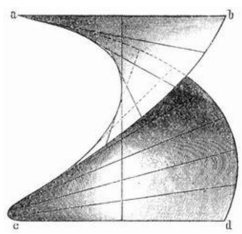
(1) Die Fläche ist abwickelbar.
(2) $K \equiv 0$.
(3) Entlang jeder der Geraden sind alle Flächennormalen zueinander parallel, d. h. die Gauß – Abbildung ist konstant längs jeder der Geraden.
(4) Eine offene und dichte Teilmenge einer jeden Torse besteht aus Stücken von Ebenen, Kegeln, Zylindern, sowie Tangentenflächen, wobei Tangentenflächen solche Regelflächen genannt werden, bei denen der Vektor X tangential an die Kurve c ist.

Definition & Satz**:** (*Weingarten – Fläche, W – Fläche)*

Eine Weingarten – Fläche nennt man eine Fläche dann, wenn zwischen den beiden Hauptkrümmungen (oder zwischen H und K) eine nichttriviale Relation besteht, also wenn es eine Funktion Φ in zwei Veränderlichen gibt mit $\Phi(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ (bzw. $\Phi(H, K) = 0$. Es gilt:

(1) Jede Drehfläche ist eine Weingarten – Fläche.
(2) Unter allen Regelflächen besteht die Klasse der Weingarten – Flächen genau aus allen abwickelbaren Regelflächen sowie allen Schraubregelflächen.



Alle oben aufgeführten Definitionen, Sätze, Folgerungen… wurden von Wolfgang Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg Verlag, 4. überarbeitete Auflage, 2008 entnommen.