Morse-Theorie und Geschlossene Geodätische [1]

erschienen als: Bonner Mathematische Schriften **229** (1992)

Hans-Bert Rademacher

[1]Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn 1991, *elektronische Version mit geringfügigen Abweichungen im Seitenumbruch von der ursprünglichen Version*

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden morsetheoretische Methoden benutzt, um einerseits Eigenschaften von Riemannschen bzw. Finsler- Metriken mit nur endlich vielen geschlossenenen Geodätischen zu studieren und um andererseits Bedingungen für die Existenz unendlich vieler geschlossener Geodätischen auf kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfalten anzugeben.

Zu Anfang dieses Jahrhunderts untersuchte Poincaré, motiviert durch Probleme der Himmelsmechanik, die Existenz geschlossener Geodätischen mit gewissen Stabilitätseigenschaften auf konvexen Flächen. Mit Hilfe der Minimax-Methode zeigte Birkhoff 1917 bzw. 1927, dass es auf der 2-dimensionalen bzw. n-dimensionalen Sphäre für jede Metrik eine geschlossene Geodätische gibt. darauf aufbauend bewiesen Lusternik-Fet 1951, dass es auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit eine geschlossene Geodätische gibt.

Geschlossene Geodätische auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M lassen sich charakterisieren als die kritischen Punkte positiver Energie des Energiefunktionals ΛM, der eine geeignete Vervollständigung des Raumes der geschlossenen differenzierbaren Kurven auf M ist. Das Energiefunktional erfüllt die Palais-Smale Bedingung. Diese Beschreibung wurde von Klingenberg eingeführt, sie hat gegenüber der von Morse benutzen endlich-dimensionalen Approximation des Raums der geschlossenen Kurven durch Räume gebrochener Geodätischen den Vorteil, dass die orthogonale Gruppe $\mathbb{O}(2)$ kanonisch auf ΛM durch lineare Umparametrisierung operiert. Das Energiefunktional ist invariant unter dieser Aktion, d. h. es treten kritische $\mathbb{O}(2)$-Bahnen auf. Wenn die Existenz mehrerer geometrisch verschiedener geschlossener Geodätischen gezeigt werden soll, ist es ein prinzipielles Problem, zu entscheiden, ob zwei krischen Punkte des Energiefunktionals zu geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen gehören, denn mit einer geschlossenen Geodätsichen c sind auch die Iterierten c^m mit $c^m(t) = c(mt)$

geschlossene Geodätische.

Auf Flächen kann man energievermindernde Deformationen von Zykeln geschlossener Kurven ohne Doppelpunkte angeben, die keine Selbstschnitte produzieren. So konnten Lusternik-Schnirelmann 1929 mit der Methode der subordinierten Homologieklassen zeigen, dass es auf S^2 für jede Metrik drei (geometrisch verschiedene) geschlossene Geodätische ohne Doppelpunkte gibt. Vollständige Beweise wurden u. a. von Ballmann, Jost und Grayson gegeben. Dagegen kann in höheren Dimensionen mit Hilfe subordinierter Homologieklassen zum Beispiel auf Sphären die Existenz mehrerer *kurzer* geschlossener Geodätischen bisher nur unter zusätzlichen Annahmen gezeigt werden, dies wurde u.a. von Alber, Klingenberg, Anosov, Hingston und Ballmann-Thorbersson-Ziller durchgeführt. Thorbergsson und darauf aufbauend Ballmann-Thorbergsson-Ziller erhalten auch Stabilitätsaussagen für diese kurzen geschlossenen Geodätischen, so existiert auf einer Sphäre mit Schnittkrümmung $1/4 \leq K \leq 1$ eine nicht-hyperbolische geschlossene Geodätische mit Länge $\in [2\pi, 4\pi]$.

Im morsetheoretischen Ansatz werden einer geschlossenen Geodätischen der *Index* $\mathrm{ind}(c)$ und die *Nullität* $\mathrm{null}(c)$ zugeordnet. Falls alle geschlossenen Geodätischen nicht-degeneriert sind, d. h. ihre Nullität verschwindet, so heißt die Matrik *holprig* (englisch *bumpy*). Dann sind die geschlossenen Geodätischen isoliert und das Energiefunktional kann als Morse-Funktion mit nicht-degenerierten kritischen $\phi(2)$-Bahnen aufgefaßt werden. Die lokale Homologie der geschlossenen Geodätischen (auch *kritische Gruppen* genannt) wird dann allein durch den Index kontrolliert. Im allgemeinen Fall ist die Dimension der kritischen Gruppen der Iterierten c^m einer geschlossenen Geodätischen c nach dem *shifting theorem* von Gromoll-Meyer unabhängig von m nach oben beschränkt. Damit und mit einer Abschätzung über das Wachstum der Folge der Indices der Iterierten einer geschlossenen Geodätischen, die aus dem Resultat von Bott folgt, konnten Gromoll-Meyer 1969 zeigen, dass es für jede Riemannsche Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, für die Folge der Betti-Zahlen des freien Schleifenraums bezüglich eines Körpers unbeschränkt ist, unendlich viele geschlossene Geodätische gibt. Vigué-Poirrier/Sullivan zeigten 1976 mit Hilfe des Theorie der minimalen Modelle, dass für eine kompakte einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit M die Folge der rationalen Betti-Zahlen des freien Schleifenraums genau dann beschränkt ist, falls die rationale Kohomologie-Algebra von M nur von einem Element erzeugt wird.

Um auch für diese Mannigfaltigkeiten mit *einfacher* Topologie (zum Beispiel Sphären) Existenzresultate zu erhalten, kann man ein Resultat von Klingenberg-Takens verwenden. Es besagt, dass es für eine C^4-generische Riemannsche Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit entweder eine nicht hyperbolische geschlossenene Geodätisiche vom Twist-Typ gibt, oder dass alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. Die Twist-Bedingung ist eine offene Bedingung an den 3-Jet der Poincaré-Abbildung. Sie erlaubt die Anwendung eines Resultats von Moser, aus dem die Existenz unendlich vieler geschlossener Geodätischen in jeder Tubenumgebung der Geodätischen vom Twist-Typ folgt, deren Längen gegen ∞ streben.

Hingston bewies 1981, dass es auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit vom rationalen Homotopietyp eines kompakten symmetrischen Raums vom Rang 1 mit einer Riemannschen Metrik, deren geschlossene Geodätische alle hyperbolisch sind, unendlich viele geschlossene Geodätische gibt. 1987 zeigt der Autor, dass diese Aussage auch für kompakte einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten gilt, deren rationale Kohomologie-Algebra durch ein Element gerader Ordnung erzeugt wird. Damit folgt aus den oben zitierten Resultaten, dass auf deiner kompakten Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe eine C^4-generische Riemannsche Metrik unendlich viele geschlossene Geodätische hat.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten mit nicht-trivialer endlicher Fundamentalgruppe konnten Ballmann-Thorbergsson-Ziller 1981 zeigen, dass es für eine C^4-generische Riemannsche Metrik unendlich viele geschlossenen

Geodätische gibt, Bangert-Klingenberg konnten dies 1983 sogar für eine C^4-offene und dichte Menge von Riemannschen Metriken zeigen. Im Fall der 2-dimensionalen Sphäre erhält man durch Kombination von Resultaten von Birkhoff und Bangert, dass es für eine C^2-offene und dichte Menge von Metriken unendlich viele geschlossene Geodätische gibt.

Als ein Hauptergebnis dieser Arbeit wird gezeigt, dass eine C^2-generische Riemannsche Metrik auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische hat. Diese Existenzaussage folgt allein aus morsetheoretischen Argumenten ohne Zuhilfenahme von Resultaten aus der Theorie der dynamischen Systeme.

Nun zum Aufbau dieseer Arbeit: Im 2. Kapitel stellen wir Eigenschaften des Energiefunktionals auf dem freien Schleifenraum zusammen. Die linearisierte Poincaré-Abbildung P_c einer geschlossenen Geodätischen c wird im 3. Kapitel eingeführt, sie ist eine lineare symplektische Abbildung. Wir studieren die Normalformen solcher Abbildungen.

Im 4. Kapitel beschäftigen wir uns mit der Folge $\text{ind}(c^m), m \geq 1$. Wir geben Botts Formel an, aus der u. a. folgt, dass der *mittlere Index* $\alpha_c = \lim_{m\to\infty} ind(c^m)/m$ einer geschlossenen Geodätischen existiert. Die Folge $\text{ind}(c^m) - \text{ind}(c)$ und damit auch die Zahl $\alpha_c - \text{ind}(c)$ hängt nur von der symplektischen Normalform der Abbildung P_c ab. Dieser Zusammenhang wird mit Hilfe der Sprungzahlen und der *Poincaré-Exponenten* $\lambda_j \in [0, 1/2]$ der Eigenwerte $\exp(\pm 2\pi i \lambda_j)$ vom Betrag 1 von P_c ausgedrückt. Wenn insbesondere die Eigenwerte von P_c einfach sind, dann hängt der mittlere Index einer nicht-hyperbolischen geschlossenen Geodätischen linear von den Poincaré-Exponenten ab.

In Kapitel 5 führen wir Eigenschaften von Geodätischen von Finsler-Metriken auf. Die morsetheoretischen Aussagen dieser Arbeit gelten auch für Geodätische von Finsler-Metriken. Im Gegensatz zum Riemannschen Fall gibt es einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, die nur endlich viele geschlossene Geodätische haben. So gibt es auf S^2 eine Familie von nicht-symmetrischen, holprigen Finsler-Metriken mit nur zwei geschlossenen Geodätischen. Da für diese Metriken der Index der längeren geschlossenen Geodätischen beliebig groß werden kann, ist es nicht möglich, analog zum Beweis des Satzes von Lusternik-Schnirelmann zu zeigen, dass für jede Metrik die beiden subordinierten Homologieklassen der Dimension 1 und 3 an doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen hängenbleiben.

Im 6. Kapitel werden die Morse-Ungleichungen für das Energiefunktional auf dem Quotienten $\Lambda M/S^1$ aufgestellt und die S^1-kritischen Gruppen einer möglicherweise degenerierten geschlossenen Geodätischen berechnet. 1987 zeigte der Autor, dass es für eine holprige Finsler-Metrik mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit eine Beziehung zwischen den mittleren Indices und einer topologischen Invarianten von M gibt. Insbesondere konnte damit gezeigt werden, dass eine dieser Geodätischen nicht-hyperbolisch ist, falls M gerade Dimension hat. Als ein Hauptergebnis dieser Arbeit wird im 7. Kapitel gezeigt, dass für jede Finsler-Metrik auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen die mittleren Indices algebraisch abhängig sind.

Es ist bisher kein Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bekannt, auf der alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. Im 8. Kapitel zeigen wir, dass die 1988/89 von Donnay und Burns-Gerber angegebenen Beispiele von Metriken auf S^1 mit ergodischem geodätischen Fluß auch Beispiele für Metriken sind, bei denen alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, d. h. alle morsetheoretisch relevanten geschlossenen Geodätischen sind hyperbolisch. Ebenso erhält man so Beispiele für Metriken auf S^2 mit einer Isometrie endlicher Ordnung, für die alle isometrie-invarianten Geodätischen hyperbolisch sind, sowie Beispiele von Metriken auf der reell-projektiven Ebene und auf dem 2-Torus, für die alle nicht-nullhomotopen geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind.

Eine Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit heißt *stark holprig*, wenn die linearisieren Poincaré-Abbildungen der geschlossenen Geodätischen nur einfache Eigenwerte haben und wenn die Poincaré-Exponenten aller nicht-hyperbolischen geschlossenen Geodätischen algebraisch unabhängig sind. Aus den Ergebnissen des 7. Kapitels folgt, dass eine stark holprige Finsler-Metrik auf einer kompakten einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische hat. Mit Hilfe eines lokalen Störungssatzes von Klingenberg-Takens zeigen wir im 9. Kapitel, dass für $2 \leq k \leq \infty$ eine C^k-generische Riemannsche Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit stark holprig ist. Nach einer Bemerkung von Ziller folgt aus dem Schließungslemma für Hamiltonsche Systeme, dass für eine C^2-generische Finsler-Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit die Menge der Anfangsrichtungen geschlossener Geodätischer dicht im Einheitstangentialbündel ist.

Als generelle Referenz für die Theorie der geschlossenen Geodätischen sei auf Klingenbergs Buch [Kl1] und auf den Übersichtsartikel [Ba] von Bangert verwiesen; in beiden Quellen findet man ausführliche Literaturverzeichnisse.

2 Das Energiefunktional auf dem freien Schleifenraum

2.1 Die kritische Punkttheorie des Energiefunktionals

Wir gehen aus von einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik $g = \langle .,. \rangle$. Auf dem Raum $C^\infty(S^1, M)$ der C^∞–differenzierbaren geschlossenen Kurven auf M ist das *Energiefunktional*

$$E : C^\infty(S^1, M) \to \mathbb{R} \quad , \quad E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$$

definiert. Generelle Referenz für dieses Kapitel ist das 1.Kapitel aus dem Buch [Kl1] von W.Klingenberg. Nach der 1.Variationsformel gilt für eine Variation $c_s : S^1 \to M, s \in (-\epsilon, \epsilon), \epsilon > 0$ mit differenzierbaren geschlossenen Kurven mit $c_0 = c$ und dem Variationsvektorfeld $V = \frac{\partial}{\partial s} c_s(0)$

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(0) = \int_0^1 \langle \nabla \dot{c}, V \rangle$$

wobei ∇ die kovariante Ableitung längs c bezeichnet. Eine differenzierbare geschlossene Kurve c ist also kritischer Punkt von E genau dann, wenn c eine geschlossene Geodätische ist. Um Morse–Theorie auf einem Raum geschlossener Kurven mit dem Energiefunktional als Morse–Funktion anwenden zu können, ist es notwendig, eine geeignete Vervollständigung des Raums $C^\infty(S^1, M)$ zu verwenden.

Der *freie Schleifenraum* $\Lambda M = H^1(S^1, M)$ wird wie folgt definiert:

$$\Lambda M = \left\{ c : S^1 \to M \,\middle|\, c \text{ ist absolut stetig } , \int_0^1 \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle < \infty \right\}.$$

ΛM trägt die Struktur einer differenzierbaren unendlich–dimensionalen Mannigfaltigkeit (auch *Hilbert–Mannigfaltigkeit der geschlossenen Kurven* genannt). Einen Atlas erhält man wie folgt: Sei $\pi : TM \to M$ die kanonische Projektion des Tangentialbündels TM auf M und sei $\exp : TM \to M$ die Exponentialabbildung mit Einschränkung $\exp_p : T_pM \to M$ für $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung U des Nullschnitts in TM, so daß die Abbildung

$$\pi \times \exp : U \to M \times M, X \mapsto (\pi(X), \exp(X))$$

ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der Diagonalen in $M \times M$ ist. Wir wählen eine differenzierbare geschlossene Kurve $c : S^1 \to M$ und bezeichnen mit $H^1(c^*(U))$ die H^1–Vektorfelder $X(t), t \in S^1$ längs c mit $X(t) \in U$. Mit Hilfe der Exponentialabbildung wird dann eine Karte ψ_c definiert durch:

$$\psi_c = \exp_c : H^1(c^*(U)) \to U(c) := \exp_c(H^1(c^*))) \subset \Lambda M,$$

wobei $(\exp_c \xi)(t) = \exp_{c(t)} \xi(t)$. Der Modellraum ist also der separable Hilbertraum $H^1(c^*(TM))$ der H^1–Vektorfelder längs c. Das differenzierbare Vektorraumbündel $\pi_{\Lambda M} : H^1(S^1, TM) \to H^1(S^1, M)$ kann mit dem Tangentialbündel $T\Lambda M \to \Lambda M$ identifiziert werden. Die Riemannsche Metrik $g = \langle ., . \rangle$ auf M induziert eine Riemannsche Metrik $\langle ., . \rangle_1$ auf ΛM. Wenn $c \in \Lambda M$ differenzierbar ist und X, Y H^1–Vektorfelder längs c sind, dann gilt

$$\langle X, Y \rangle_1 = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla X(t), \nabla Y(t) \rangle dt.$$

Diese Metrik besitzt eine eindeutige Erweiterung zu einer Riemannschen Metrik auf ΛM.

Auf der Gruppe S^1 der komplexen Zahlen mit Norm 1, die wir auch mit der speziellen orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ des 2–dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^2$ bzw. mit der Gruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identifizieren können, operiert die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ in kanonischer Weise. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen. Sei $S^1 = \{\exp(2\pi i t) \in \mathbb{C}; t \in [0, 1]\}$ dann ist

$$(z, w) \in S^1 \times S^1 \mapsto z.w \in S^1$$

die Operation von S^1 auf S^1. $\mathrm{O}(2)$ wird erzeugt durch S^1 und das Element

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$$

bzw. $\theta(z) = \bar{z}, z \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Es gilt die Vertauschungsrelation $z\theta = \theta z^{-1}$. So erhalten wir eine kanonische $\mathbb{O}(2)$–Operation auf ΛM,

$$\mathbb{O}(2) \times \Lambda M \to \Lambda M, (z, c) \mapsto z.c$$

mit $z.c(t) = c(z.t)$. Insbesondere erzeugt also

$$\theta : \Lambda M \to \Lambda M \, , \, \theta.c(t) = c(1-t)$$

eine $\mathbb{Z}_2$–Aktion auf ΛM. $\mathbb{O}(2)$ operiert also auf ΛM duch lineare Umparametrisierung, d.h. Wahl des Anfangspunkts und evtl. Änderung der Orientierung. Für ein Element $w \in \mathbb{O}(2)$ ist die Abbildung

$$w : \Lambda M \to \Lambda M, c \mapsto w.c$$

differenzierbar und eine Isometrie bezüglich der Riemannschen Metrik $\langle .,. \rangle_1$. Denn wenn $X(t)$ ein H^1–Vektorfeld längs c ist, dann gilt $w.X(t) = X(t+w)$, d.h. bezüglich der Karten $(\exp_c, U(c))$ und $(exp_{w.c}, U(w.c))$ ist die Abbildung w ein linearer Isomorphismus. Aus der Definition von $\langle .,. \rangle_1$ folgt, daß w isometrisch ist. Die S^1–Aktion auf ΛM ist stetig, aber nicht differenzierbar. Wenn nämlich $e : \Lambda M \to M, e(c) = c(0)$ die differenzierbare Auswertungsabbildung zur Zeit $t = 0$ ist und $c \in \Lambda M$ eine nicht–differenzierbare Kurve, dann ist $z \in S^1 \mapsto e(z.c) = z.c(0) = c(z)$ nicht differenzierbar.

ΛM mit der Metrik $\langle .,. \rangle_1$ ist eine vollständige separable $\mathbb{O}(2)$–Riemannsche Mannigfaltigkeit. Das differenzierbare Energiefunktional E ist $\mathbb{O}(2)$–invariant mit der Ableitung

$$dE(c).X = \int_0^1 \langle \nabla \dot{c}(t), X(t) \rangle dt.$$

Wir setzen für $a \geq 0$ $\Lambda^a M = \{c \in \Lambda M \,|\, E(c) \leq a\}$. $\Lambda^0 M$ ist also gerade die Menge der Punktkurven (d.h. der konstanten Abbildungen $c(S^1) = \{p\}, p \in M$), die mit M identifiziert werden kann. $\Lambda^0 M$ ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von ΛM, die Inklusion $M \to \Lambda^0 M \subset \Lambda M$ ist eine totalgeodätische isometrische Immersion. Die kritischen Punkte von E sind die geschlossenen Geodätischen von M und die Punktkurven. Wir werden immer voraussetzen, daß eine geschlossene Geodätische c positive Energie $E(c) > 0$ hat. Geschlossene Geodätische sind differenzierbare Kurven, wenn $c \in \Lambda M$ eine geschlossene Geodätische ist, dann ist die Bahn $\mathbb{O}(2).c$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von geschlossenen Geodätischen in ΛM. Für eine Kurve $c \in \Lambda M$ ist die Isotropieuntergruppe

$$I(c) = \{w \in \mathbb{O}(2) \,|\, w.c = c\}$$

eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{O}(2)$. Die Fixpunktmenge der $\mathbb{O}(2)$–Aktion ist genau die Untermannigfaltigkeit $\Lambda^0 M$ der Punktkurven. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine geschlossene Kurve , d.h. $c(t+1) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\theta c = c$, d.h. $c(t) = c(1-t)$ für alle t. Dann ist $c(1/2+t) = c(1/2-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, weshalb c keine geschlossene Geodätische sein kann. Für eine geschlossene Geodätische c ist also die Isotropieuntergruppe $I(c)$ eine abgeschlossene Untergruppe von S^1. Wenn $I(c) \cong \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, dann heißt $m = \mathrm{mul}(c)$ die *Multiplizität* von c, c heißt *prim*, wenn $\mathrm{mul}(c) = 1$. Zwei geschlossene Geodätische $c_1, c_2 : S^1 \to M$ heißen *geometrisch gleich*, falls $c_1(S^1) = c_2(S^1)$. Auf ΛM ist die Abbildung

$$^m : \Lambda M \to \Lambda M \quad , \quad c^m(t) = c(mt) \tag{1}$$

definiert. Wenn c eine prime geschlossene Geodätische ist, dann ist $S^1.c^m \cup S^1.\theta c^m$ die Menge der geometrisch gleichen geschlossenen Geodätischen, auch *Turm* von c genannt. Eine geschlossene Geodätische heißt *einfach*, wenn die Abbildung $c : S^1 \to M$ injektiv ist. Eine einfache geschlossene Geodätische ist also insbesondere prim.

Mit Hilfe der Metrik $\langle .,. \rangle_1$ ist das Gradientenfeld $\mathrm{grad}E$ von E definiert durch die Gleichung

$$\langle \mathrm{grad}E(c), X \rangle_1 = dE(c).X \quad \forall X \in T_c\Lambda M\,.$$

ΛM ist nicht lokal–kompakt, trotzdem kann man Methoden der kritischen Punkttheorie für Funktionen auf endlich–dimensionalen bzw. kompakten Mannigfaltigkeiten anwenden, da $(\Lambda M, \langle .,. \rangle_1)$ mit dem Energiefunktional E die folgende Bedingung erfüllt:

Palais–Smale Bedingung: *Wenn (c_m) eine Folge in ΛM ist, für die $E(c_m)$ beschränkt ist und* $\lim_{m\to\infty} \|\mathrm{grad} E(c_m)\|_1 = 0$ *gilt, so besitzt (c_m) eine Teilfolge, die gegen einen kritischen Punkt von E konvergiert.*

Es folgt unter anderem, daß für ein $a > 0$ die Menge der geschlossenen Geodätischen c mit $E(c) \le a$ kompakt ist. Der Fluß

$$\Phi_s : \Lambda M \to \Lambda M \quad , \quad \frac{d\Phi_s}{ds}(c)|_{s=t} = -\mathrm{grad} E(\Phi_t c)$$

zum negativen Gradientenfeld von E ist für alle $s \ge 0$ erklärt. Wenn $c \in \Lambda M$, dann ist $\lim_{s\to\infty}(\Phi_s c)$ ein kritischer Punkt von E, d.h. eine Punktkurve oder eine geschlossene Geodätische.

Die Hessesche $d^2E(c)$ von E in einem kritischen Punkt ist gegeben durch:

$$d^2E(c)(X,Y) = \int_0^1 \left\{ \langle \nabla X, \nabla Y \rangle(t) - \langle R(X,\dot{c})\dot{c}, Y\rangle(t) \right\} dt \,. \tag{2}$$

Dabei ist R der Riemannsche Krümmungstensor. Wenn A_c der zugehörige selbstadjungierte Operator ist, d.h.

$$\langle A_c X, Y \rangle_1 = d^2E(c)(X,Y) \quad \forall X, Y \in T_c\Lambda M$$

dann ist $A_c - \mathrm{id}$ ein kompakter Operator. Deshalb hat A_c entweder endlich viele Eigenwerte oder die Eigenwerte bilden eine abzählbare Folge mit 1 als einzigem Häufungspunkt. Wir bezeichnen mit

$$T_c\Lambda M = T_c^+\Lambda M + T_c^0\Lambda M + T_c^-\Lambda M \tag{3}$$

die orthogonale Zerlegung von $T_c\Lambda M$ in die Unterräume, die von den Eigenvektoren von A_c zu Eigenwerten λ mit $\lambda > 0, \lambda = 0$ und $\lambda < 0$ aufgespannt werden. Da A_c konjugiert ist zu $A_{z.c}$ für $z \in \mathbb{O}(2)$ mit $Tz : T_c\Lambda M \to T_{z.c}\Lambda M$ ist die Zerlegung (3) von $T_c\Lambda M$ $\mathbb{O}(2)$–äquivariant. Die Eigenvektoren von A_c zum Eigenwert λ sind die periodischen Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichung 2.Ordnung

$$(\lambda - 1)(\nabla^2 - 1)X - (\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X\rangle + 1)\, X = 0\,, \tag{4}$$

sie sind deshalb differenzierbar.

Dann sind die Zahlen $\dim T_c^- \Lambda M, \dim T_c^0 \Lambda M$ endlich, und wir nennen

$$\mathrm{ind}(c) := \dim T_c^- \Lambda M$$

den *Index* und

$$\mathrm{null}(c) := \dim T_c^0 \Lambda M - 1$$

die *Nullität* der geschlossenen Geodätischen c. Die Nullität und der Index sind konstant längs $\mathbb{O}(2)$–Bahnen. Aus der Formel (2) folgt, daß $T_c^0 \Lambda M$ identifiziert werden kann mit dem Raum der periodischen normalen (d.h. zu $\dot{c}$ orthogonalen) Jacobifeldern längs c, deshalb gilt also $\mathrm{null}(c) \leq 2n - 2$, wobei $n = \dim(M)$.

Eine zusammenhängende S^1–Untermannigfaltigkeit B (ohne Rand) von ΛM, die aus kritischen Punkten von E besteht und für die $E(B) = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt, heißt *kritische Untermannigfaltigkeit*. Wenn der Index und die Nullität auf einer kritischen Untermannigfaltigkeit konstant sind und wenn $\mathrm{null}(c) = \dim(B) - 1$, dann heißt B *nicht–degenerierte kritische Untermannigfaltigkeit*. Diese Definition geht auf Bott zurück [Bo1]. Die Untermannigfaltigkeit $\Lambda^0 M$ der Punktkurven ist eine nicht–degenerierte kritische Untermannigfaltigkeit. Da Isometrien der Mannigfaltigkeit auch auf ΛM und insbesondere auf der Menge $Cr(\Lambda M) := \{c \in \Lambda M \,|\, dE(c) = 0\}$ der kritischen Punkte operieren, treten kritische Untermannigfaltigkeiten mit Dimension > 1 in symmetrischen Beispielen auf. So ist das Energiefunktional E auf einem (global) symmetrischen kompakten Raum nach W.Ziller [Zi1] eine *Morsefunktion*, d.h. $Cr(\Lambda M)$ ist die disjunkte Vereinigung von nicht–degenerierten kritischen Untermannigfaltigkeiten.

Eine geschlossene Geodätische c heißt *nicht–degeneriert*, falls die kritische Bahn $S^1.c$ eine nicht–degenerierte kritische Untermannigfaltigkeit ist, d.h. wenn $\mathrm{null}(c) = 0$. Die Metrik g heißt *holprig* (englisch *bumpy*) falls alle geschlossenen Geodätischen nicht–degeneriert sind. In diesem Fall besteht die kritische Menge $Cr(\Lambda M)$ also aus nicht–degenerierten kritischen Untermannigfaltigkeiten diffeomorph zu S^1.

Eine C^2–generische Metrik ist holprig, dies ist die Aussage des *bumpy metric theorem*, auf das wir noch genauer in Kapitel 9 eingehen.

2.2 Das Energiefunktional auf dem Schleifenraum

In diesem Abschnitt werden wir den Ω–Index einer geschlossenen Geodätischen einführen und den Zusammenhang zur Anzahl konjugierter Punkte angeben.

Für einen Punkt $p \in M$ heißt

$$\Omega_p M = \{c \in \Lambda M \mid c(0) = p\}$$

der *Schleifenraum* mit Basispunkt $p \in M$. $\Omega_p M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von ΛM. Der Tangentialraum $T_c\Omega_p M$ an eine Schleife $c : ([0,1], \{0,1\}) \to (M, p)$ kann identifiziert werden mit den H^1–Vektorfeldern X längs c mit $X(0) = X(1) = 0$, d.h. $\Omega_p M$ hat als Untermannigfaltigkeit von ΛM Kodimension n. Die Einschränkung

$$E_\Omega : \Omega_p M \to \mathbb{R}$$

des Energiefunktionals erfüllt wiederum die Palais–Smale Bedingung (im Unterschied zu ΛM auch für vollständige, nicht–kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten). Die kritischen Punkte von E_Ω mit $E_\Omega > 0$ sind die *geodätischen Schleifen* $c : [0,1] \to M$, für die im Unterschied zu geschlossenen

Geodätischen i.a. $\dot{c}(0) \neq \dot{c}(1)$ gilt. Wir bezeichenen mit $\mathrm{ind}_\Omega(c)$ bzw. $\mathrm{null}_\Omega(c)$ den Index bzw. die Nullität der Hesseschen $d^2E_\Omega(c)$. $\mathrm{null}_\Omega(c)$ ist die Dimension des Raums der Jacobifelder $Y(t)$ längs $c(t)$, für die $Y(0) = Y(1) = 0$. Also gilt $\mathrm{null}_\Omega(c) \leq n-1, n = \dim M$. Da $T_c\Omega_p M$ ein Unterraum von $T_c\Lambda M$ ist, gilt $\mathrm{ind}_\Omega(c) \leq \mathrm{ind}(c)$. Sei $n(t)$ die Dimension des Raums der normalen Jacobifelder Y längs c mit $Y(0) = Y(t) = 0$. Falls $n(t) \geq 1$, so heißt $n(t)$ auch die Multiplizität des zu $p = c(0)$ konjugierten Punktes $c(t)$ längs $c|[0,t]$. Dann besagt der *Indexsatz für geodätische Segmente von Morse*, daß

$$\mathrm{null}_\Omega(c) = n(1) \quad , \quad \mathrm{ind}_\Omega(c) = \sum_{0<t<1} n(t). \tag{5}$$

2.3 Die äquivariante Topologie des freien Schleifenraums und des Raums der stetigen bzw. differenzierbaren geschlossenen Kurven

Entscheidend für die kritische Punkttheorie auf ΛM ist die Tatsache, daß der $\mathbb{O}(2)$–Homotopietyp von ΛM nicht von der gewählten Metrik, sondern nur vom Homotopietyp von M abhängt. Wenn nämlich $f : M_1 \to M_2$ eine Homotopieäquivalenz ist, so gibt es eine homotope differenzierbare Homotopieäquivalenz $F : M_1 \to M_2$. Die induzierte Abbildung $\Lambda F : \Lambda M_1 \to \Lambda M_2, \Lambda F(c) = F \circ c$ ist dann eine (differenzierbare) $\mathbb{O}(2)$–Homotopieäquivalenz. Sei $C^0(S^1, M)$ der Raum der geschlossenen stetigen Kurven mit der Supremumnorm und sei $C^\infty(S^1, M)$ der Raum der C^∞–differenzierbaren geschlossenen Kurven mit der C^∞–Topologie. Dann sind die Inklusionen

$$C^\infty(S^1, M) \xrightarrow{i} \Lambda M \xrightarrow{j} C^0(S^1, M)$$

stetig. Nach einem Theorem von R.Palais [Pa] sind die Inklusionen i und j Homotopieäquivalenzen. Da auch die Räume $C^\infty(S^1, M)$ und $C^0(S^1, M)$ eine stetige $\mathbb{O}(2)$–Aktion besitzen, bezüglich derer die Inklusionen äquivariant sind, möchte man auch die äquivarianten Topologien bzw. die Topologien der entsprechenden Quotienten vergleichen.

Sei G eine kompakte Liegruppe, dann ist das klassifizierende Bündel $EG \to BG$ erklärt. Dies ist ein bis auf Bündelisomorphie eindeutiges G–Hauptfaserbündel mit zusammenziehbarem Totalraum EG. Dann ist für einen topologischen Raum X, auf dem die Gruppe G (nicht notwendig frei) operiert, der Homotopiequotient X_G wie folgt erklärt: Auf $X \times EG$ operiert die Gruppe G frei durch

$$((x, e), g) \in X \times EG \times G \mapsto (g.x, g.e) \in X \times EG\,.$$

Dann ist der Quotient $X_G = X \times_G EG = (X \times EG)/G$ der *G–Homotopiequotient.* X_G dient dann oft als Ersatz für den Quotienten X/G, der i.a. schwieriger zu handhaben ist, falls G nicht frei operiert.

So führte Morse die *circular connectivities* der Sphäre ein als die Betti-zahlen $b_i(\Lambda S^n/\mathbb{O}(2); \mathbb{Z}_2)$ des Quotientenraums $\Lambda S^n/\mathbb{O}(2)$. Seine Berechnung ist aber nicht korrekt, da diese Aktion nicht frei ist. Diese Betti–Zahlen sind bisher trotz einiger Versuche noch nicht bestimmt worden.

Dagegen konnte Hingston in [Hi1] die $\mathbb{Z}_2$–Betti–Zahlen $b_i(\Lambda S^n_{\mathbb{O}(2)}; \mathbb{Z}_2)$ des $\mathbb{O}(2)$–Homotopiequotienten berechnen. In [Hi2] gibt Hingston aufbauend auf einer Arbeit von Carlsson und Cohen [CC] ein äquivariantes Modell für ΛS^n an, das die Berechnung der äquivarianten Kohomologie $H_G(\Lambda S^n) = H(\Lambda S^n_G)$ für $G = S^1$ und $G = \mathbb{O}(2)$ erlaubt. Doch zurück zum Vergleich der äquivarianten Topologien von $C^\infty(S^1, M), \Lambda M$ und $C^0(S^1, M)$.

Theorem 2.1 (Hingston [Hi1] 3.2) *Sei $X = C^\infty(S^1, M)$ oder ΛM, $Y = C^0(S^1, M)$, sei X^H bzw. Y^H die Fixpunktmenge von X bzw. Y bezüglich einer abgeschlossenen normalen Untergruppe H von $\mathbb{O}(2)$ und sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{O}(2)$. Dann induziert die Inklusion $i : X \to Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz*

$$i_G : (X_G, X^H_G) \to (Y_G, Y^H_G).$$

Daraus folgt, daß die rationalen Betti–Zahlen der Quotientenräume $\Lambda M/H$, $C^0(S^1, M)/H$ und $C^\infty(S^1, M)/H$ übereinstimmen.

3 Die linearisierte Poincaré–Abbildung geschlossener Geodätischer

3.1 Normalformen symplektischer linearer Abbildungen

Für eine geschlossenen Geodätische $c : \mathbb{R} \to M$, mit $c(t+1) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ kann man die *linearisierte Poincaré–Abbildung* P_c wie folgt definieren: Sei $p = c(0)$ und E das orthogonale Komplement in T_pM zu dem 1–dimensionalen Unterraum $\mathbb{R}\dot{c}$. Dann setzen wir

$$P_c : E \oplus E \to E \oplus E\,,\; P_c(X,Y) = (J(1), \nabla J(1))$$

wobei J das durch die Anfangsbedingungen $J(0) = X, \nabla J(0) = Y$ eindeutig bestimmte Jacobifeld längs c ist. Hierbei ist ∇ die kovariante Ableitung längs c. Auf $E \oplus E$ haben wir die kanonische symplektische Struktur

$$\omega((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = \langle X_1, Y_2 \rangle - \langle X_2, Y_1 \rangle,$$

die P_c erhält. Für Jacobifelder J_1, J_2 gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\langle J_1, \nabla J_2\rangle - \langle J_2, \nabla J_1\rangle\right) &= \langle J_1, \nabla^2 J_2\rangle - \langle J_2, \nabla^2 J_1\rangle \\ &= \langle J_1, R(J_2, \dot{c})\dot{c}\rangle + \langle J_2, R(J_1, \dot{c})\dot{c}\rangle = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist R der Riemannsche Krümmungstensor von M. Nach Wahl einer Orthonormalbasis von E erhalten wir also ein Element in der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n-1)$ der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$, die die kanonische symplektische 2–Form ω erhalten. Die symplektische Matrix P_c ist dann bis auf Konjugation in $\mathrm{Sp}(n-1)$ wohldefiniert , d.h. unabhängig von der Wahl des Punktes p und von der Wahl der Basis für E.

Wir werden nun Normalformen für symplektische lineare Abbildungen definieren. Zwei Elemente aus $\mathrm{Sp}(n)$ sollen konjugiert in $\mathrm{Sp}(n)$ sein genau dann, wenn ihre Normalformen übereinstimmen. Normalformen für symplektische Abbildungen wurden von verschiedenen Autoren in der Literatur diskutiert, u.a. von Klingenberg in [Kl2], Cushman und Duistermaat in [CD]; wir richten uns in der Notation nach Ballmann–Thorbergsson–Ziller [BTZ1] , S.220–223.

Gegeben sei also ein endlich–dimensionaler reeller Vektorraum E mit der symplektischen Form ω. Ein linearer Endomorphismus P von E heißt *symplektisch*, falls er ω erhält. $E_{\mathbb{C}}$ ist die Komplexifizierung von E, ω induziert eine nicht–degenerierte Hermitesche Form ω_h auf $E_{\mathbb{C}}$:

$$\omega_h(X_1 + iY_1, X_2 + iY_2) = \omega(X_1, Y_2) - \omega(Y_1, X_2) + i\,(\omega(X_1, X_2) + \omega(Y_1, Y_2))\,.$$

Die Form ω_h ist invariant unter der kanonischen linearen Erweiterung von P auf $E_{\mathbb{C}}$, die wiederum mit P bezeichnet wird. Für einen Eigenwert $z \in \mathbb{C}$ sei $V(z) = \ker N_z^k$ der verallgemeinerte Eigenraum, wobei $N_z = Pz^{-1} - \mathrm{id}, k = \dim E_{\mathbb{C}}$. Mit $z \in \mathbb{C}$ sind auch $z^{-1}, \bar{z}$ und $\bar{z}^{-1}$ Eigenwerte von P. Wenn $\mathrm{Spec}(P)$ die Eigenwerte von P sind, dann ist

$$E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{z \in \mathrm{Spec}\,,\,|z|=1} V(z) \oplus \bigoplus_{z \in \mathrm{Spec}\,,\,|z|>1} \left(V(z) \oplus V(z^{-1})\right)$$

eine Zerlegung von $E_{\mathbb{C}}$ in P–invariante paarweise orthogonale nicht–degenerierte Unterräume. Mit $J(z, m), m \in \mathbb{Z}^+$ bezeichnen wir einen P–invarianten, nicht–degenerierten Unterraum von $E_{\mathbb{C}}$, der einen Vektor $X \in J(z, m)$ enthält, so daß $N_z^m(X) = 0$, $\omega_h(N_z^{m-1}(X), X) = 0$ und $X, N_z(X), \ldots, N_z^{m-1}(X)$ eine Basis von $J(z, m)$ ist. Dann läßt sich für $|z| = 1$ $V(z)$ zerlegen in paarweise orthogonale nicht–degenerierte P–invariante Unterräume

$$V(z) = \bigoplus_{j=1}^{j(z)} J(z, m_j)$$

bzw. für $|z| > 1$

$$V(z) = \bigoplus_{j=1}^{j(z)} \left(J(z, m_j) \oplus J(\bar{z}^{-1}, m_j)\right).$$

Nun kann man auch korrespondierende reelle Jordanblöcke definieren. Jeder dieser reellen Jordanblöcke $J_{\mathbb{R}}(z, m_j)$ ist dann ein minimaler P–invarianter nicht–degenerierter Unterraum von E. Zu einem Jordanblock $J(z, m_j)$ bzw. $J_{\mathbb{R}}(z, m_j)$ gibt es eine weitere symplektische Invariante, das *Vorzeichen*, $\sigma_j \in \{0, \pm 1\}$ und der entsprechende Raum wird mit $J(z, m_j, \sigma_j)$ bzw. $J_{\mathbb{R}}(z, m_j, \sigma_j)$ bezeichnet. Falls $|z| > 1$ setzen wir $\sigma_j = 0$. Dabei ist das Vorzeichen von $J(z, m_j)$ von Null verschieden , falls $|z| = 1$. Wenn $|z| = 1$ und $m_j = 2l - 1$, dann wird das Vorzeichen $\sigma_j \in \{\pm 1\}$ definiert durch $-\sigma_j \omega_h(N_z^{l-1}X, N_z^{l-1}X) > 0$, wobei $N_z^{m_j - 1}X \neq 0$. Wenn $|z| = 1$ und $m_j = 2l$, dann ist $\sigma_j \in \{\pm 1\}$ definiert durch $i\sigma_j \omega_h(N_z^l X, N_z^{l-1}X) > 0$, wobei $N_z^{m_j-1}X \neq 0$. Das Vorzeichen von $J_{\mathbb{R}}(z, m_j)$ ist gleich dem Vorzeichen von $J(z, m_j)$ sofern $\mathrm{Im} z > 0$. Falls $z = \pm 1$, so erhält $J_{\mathbb{R}}(z, m_j)$ das Vorzeichen von $J(z, m_j)$, wenn m_j gerade ist und das Vorzeichen 0, falls m_j ungerade ist. So erhält man eine Zerlegung von E

$$E = \bigoplus_{\mathrm{Im} z \geq 0\,,\, |z| \geq 1} \bigoplus_{j=1}^{j(z)} J_{\mathbb{R}}(z, m_j, \sigma_j)$$

in paarweise orthogonale, minimale P–invariante nicht–degenerierte Unterräume. Die Folge $(z, m_j, \sigma_j), z \in \mathrm{Spec} P, |z| \geq 1, \mathrm{Im} z \geq 0$ bestimmt bis auf Reihenfolge eindeutig die Konjugationsklasse von P in der Gruppe der symplektischen linearen Abbildungen von E.

Beispiel 3.1 [BTZ1, S.222–223] $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ heißt *symplektische Basis*, falls $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ und $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = \delta_{ij}$.

a) Wir führen die 2–dimensionalen Jordanblöcke $J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma)$ auf und die

Gestalt von $P|J_{\mathbb{R}}(z,m,\sigma)$ bzgl. einer symplektischen Basis.

$$\begin{array}{rclrcl}
|z| & > & 1, \mathrm{Im} z = 0 & P|J_{\mathbb{R}}(z,1,0) & = & \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \\
z & = & \pm 1 & P|J_{\mathbb{R}}(z,1,0) & = & \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \\
 & & & P|J_{\mathbb{R}}(z,2,\sigma) & = & z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}, \sigma\{\pm 1\} \\
z & = & \exp(i\phi), 0 < \phi < \pi & P|J_{\mathbb{R}}(z,1,\sigma) & = & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sigma\sin\phi \\ \sigma\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \\
 & & & \sigma \in \{\pm 1\}. & &
\end{array}$$

b) Eine symplektische Abbildung P heißt *stabil*, falls $\{P^n X \,|\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ beschränkt ist für alle $X \in E$. Aus der Normalform folgt dann, daß P stabil ist dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte z auf dem Einheitskreis liegen und wenn $m_j = 1$ für alle j, d.h. P spaltet in 2–dimensionale Rotationen.

3.2 Die Konkavität einer geschlossenen Geodätischen

Auf $T_c\Lambda M$ bzw. $T_c\Omega M$ ist die Hessesche $H = d^2E(c)$ gegeben durch die Gleichung (2) . Wir wählen Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, so daß es kein Paar konjugierter Punkte in $[t_i, t_{i+1}]$ gibt. Wir setzen

$$\begin{aligned}
V &= \{X \in T_c\Lambda M \,|\, X|[t_i, t_{i+1}] \text{ ist ein Jacobifeld } \} \\
V_1 &= \{X \in T_c\Lambda M \,|\, X(t_i) = 0, i = 0, \ldots, k-1\}
\end{aligned}$$

Sei $T_c^{\perp}\Lambda M = \{x \in T_c\Lambda M \,|\, \langle X, \dot{c}\rangle = 0\}$, sei D_c der Raum der stetigen Vektorfelder längs c, die C^∞–differenzierbar sind auf den Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ und orthogonal sind zu $\dot{c}$, und sei für $X \in D_c$:

$$\nabla X(t_i\pm) := \lim_{t\to\infty\,,\,\pm(t-t_i)>0} \nabla X(t)$$

Dann gilt für $X, Y \in D_c$:

$$H(X,Y) \;=\; \int_0^1 \{\langle \nabla X, \nabla Y\rangle - \langle R(X,\dot{c})\dot{c}, Y\rangle\} dt$$

$$= -\int_0^1 \langle \nabla^2 X + R(X,\dot c)\dot c, Y\rangle dt + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \nabla X(t_i-) - \nabla X(t_i+), Y(t_i)\rangle$$
$$+\langle \nabla X(1-), Y(1)\rangle - \langle \nabla X(0+), Y(0)\rangle. \qquad (6)$$

Also sind V und $V_1 \cap D_c$ orthogonal bzgl. H und somit auch V und $W = \overline{V_1 \cap D_c} \subset T_c\Lambda M$. Also ist $T_c\Lambda M$ die direkte orthogonale Summe $V \oplus W$, denn für $X_i \in T_{c(t_i)}M$, $X_{i+1} \in T_{c(t_i+1)}M$ gibt es genau ein Jacobifeld Y längs $c|[t_i, t_{i+1}]$ mit $Y(t_i) = X_i, Y(t_{i+1}) = X_{i+1}$. H ist positiv definit auf V_1, da kein Punkt $t \in (t_i, t_{i+1}]$ konjugiert ist zu $c(t_i)$ längs $c|[t_i, t_{i+1}]$. Sei nun ind$H$ der Index der quadratischen Form H auf dem Vektorraum E (d.h. die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem H negativ definit ist) bzw. null$H$ die Nullität der quadratischen Form H (d.h. die Dimension des Raums $\{X \in E \,|\, H(X,Y) = 0\, \forall Y \in E\}$). Es gilt also

$$\mathrm{ind}H|V = \mathrm{ind}H = \mathrm{ind}(c)\,,\ \mathrm{null}H|V = \mathrm{null}H = \mathrm{null}(c)\,.$$

Dies zeigt also auch, daß der Index einer geschlossenen Geodätischen endlich ist, da V endlich–dimensional ist.

Den Zusammenhang zwischen $\mathrm{ind}(c)$ und $\mathrm{ind}_\Omega(c)$ kann man durch die *Konkavitätsform* $\tilde H$ beschreiben. Sei $P = P_c$ die linearisierte Poincaré–Abbildung $P : E \oplus E \to E \oplus E$ und sei ω die symplektische Form. Dann setzen wir

$$\tilde H(X,Y) := -\omega((P - \mathrm{id})X, Y)$$

auf dem Unterraum $(P - \mathrm{id})^{-1}(\{0\} \oplus E)$. Es gilt das folgende *Indextheorem für geschlossene Geodätische* von Morse [Mo2], [BTZ1, S.219] :

$$\mathrm{ind}(c) = \mathrm{ind}_\Omega(c) + (\mathrm{ind} + \dim\ker)\tilde H - \mathrm{null}(c).$$

Da

$$\begin{aligned}\mathrm{null}(c) &= \dim\{Y \in T_c^\perp \Lambda M \,|\, Y \text{ Jacobifeld mit} \\ &\quad (Y(0), \nabla Y(0)) = (Y(1), \nabla Y(1))\} \\ &= \dim\ker(P_c - \mathrm{id})\end{aligned}$$

und da

$$\dim(P_c - \mathrm{id})^{-1}(\{0\} \oplus E) \leq n - 1 + \dim\ker(P_c - \mathrm{id})$$

gilt für die *Konkavität*:

$$\mathrm{con}(c) = \mathrm{ind}(c) - \mathrm{ind}_\Omega(c)$$

der geschlossenen Geodätischen c:

$$0 \leq \mathrm{con}(c) \leq n - 1.$$

Dabei ist zu beachten, daß $\mathrm{ind}_\Omega(c)$ und somit auch $\mathrm{con}(c)$ i.a. vom gewählten Anfangspunkt $p = c(0)$ abhängen, während $\mathrm{ind}(c)$ konstant ist auf der Bahn $S^1.c$.

4 Der Index der Iterierten einer geschlossenen Geodätischen

4.1 Die Formel von Bott

Für die Morse–Theorie des Energiefunktionals E auf dem freien Schleifenraum ΛM spielt die Folge $(\mathrm{ind}(c^m))_{m\geq 1}$ der Indices der Iterierten einer geschlossenen Geodätischen c eine wichtige Rolle.

Sei $T_c\Lambda M_{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung des Vektorraums $T_c\Lambda M$ der H^1–Vektorfelder längs c und sei $\langle .,. \rangle_1$ auch die Erweiterung auf $T_c\Lambda M_{\mathbb{C}}$ zu einer hermiteschen Form. Für $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ definieren wir den Unterraum

$$T_c^z\Lambda M := \{X \in T_c\Lambda M_{\mathbb{C}} \,|\, X(1) = zX(0)\}.$$

Sei $H(z)$ die *z–Indexform*

$$H(z)(X,Y) = \int_0^1 \{\langle \nabla X, \nabla Y\rangle - \langle R(X,\dot{c})\dot{c}, Y\rangle\}\, dt$$

definiert auf $T_c^z\Lambda M \times T_c^z\Lambda M$. Dabei bezeichnen wir mit $\langle .,. \rangle$ auch die Erweiterung zu einer Hermiteschen Form und mit R die Erweiterung des Riemannschen Krümmungstensors zu einem komplex–linearen Tensor auf $TM_{\mathbb{C}}$. Dann beweist man, daß der korrespondierende selbstadjungierte Operator A_c^z wieder von der Form *Identität + kompakter Operator* ist. Deshalb sind dann wieder der *z–Index* $I_c(z)$ und die *z–Nullität* $N_c(z)$ endlich. $I_c(z)$ ist also die Summe der Dimensionen der Eigenräume von A_c^z zu negativen Eigenwerten und $N_c(z) = \dim \ker A_c^z$, falls $z \neq 1$ und $\mathrm{null}(c) = N_c(1) = \dim \ker A_c^1 - 1$. Damit können wir den Satz über den Index der Iterierten einer geschlossenen Geodätischen wie folgt formulieren:

Theorem 4.1 (Bott [Bo2, thm. A,C]) *Sei c eine geschlossene Geodätische auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und seien $I_c, N_c : S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} \to \mathbb{N}_0$ der z–Index bzw. die z–Nullität und P_c die linearisierte Poincaré–Abbildung von c. Dann gilt:*

a)

$$\operatorname{ind}(c^m) = \sum_{z^m=1} I_c(z) \quad , \quad \operatorname{null}(c^m) = \sum_{z^m=1} N_c(z)$$

b)

$$N_c(z) = \dim\ker(P_c - z\mathrm{id})$$

c) I_c ist konstant in einer Umgebung von Punkten z mit $N_c(z) = 0$. Für die Sprungzahlen

$$S_c^{\pm}(z); = \lim_{\phi\to\pm 0} I_c(z\exp(i\phi)) - I_c(z)$$

von I_c gilt

$$0 \le S_c^{\pm}(z) \le N_c(z)$$

d)

$$I_c(z) = I_c(\bar{z}), N_c(z) = N_c(\bar{z})$$

Zum Beweis benutzen wir das folgende Lemma. Dazu zunächst folgende Vereinbarung. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine geschlossene Geodätische, d.h. $c(t+1) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $X \in T_c^z\Lambda M$ d.h. $X(t) \in T_{c(t)}M$ für $0 \le t \le 1$ und $X(1) = zX(0)$. Wir identifizieren X mit dem längs c auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Vektorfeld $X(t) \in T_{c(t)}M, t \in \mathbb{R}$ mit $X(t+1) = zX(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ein Vektorfeld $X \in T_{c^m}\Lambda M$ identifizieren wir mit einem Vektorfeld $X(t) \in T_{c(t)}M$, $t \in \mathbb{R}$ längs c mit $X(t+m) = X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.2 [Kl2, 4.1] *Sei $z = \exp(2\pi i/m)$. Dann ist die Abbildung*

$$j : \bigoplus_{l=1}^{m} T_c^{z^l}\Lambda M \to T_{c^m}\Lambda M \quad , \quad j(X_1, \ldots, X_m)(t) = \sum_{l=1}^{m} z^l X_l(t)$$

ein linearer Isomorphismus mit Inversem

$$i(X) = (X_1, \ldots, X_m) \quad , \quad X_l(t) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} z^{-lj} X(t+j-1).$$

Beweis. Wenn $X_l \in T_c\Lambda M$, dann ist $X_l(t+1) = z^l X_l(t)$, daraus folgt $X(t+m) = X(t)$, d.h. j ist wohldefiniert. Umgekehrt folgt aus $X(t+m) = X(t)$:

$$\begin{aligned} X_l(t+1) &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} z^{-lj}X(t+j) = \frac{1}{m}z^l \sum_{j=1}^{m} z^{-l(j+1)}X(t+j) \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} z^{-l(j+1)}X(t+j) + \frac{1}{m}z^l z^{-l(m+1)}X(t+m) \\ &\quad -\frac{1}{m}z^l z^{-l}X(t) = z^l \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} z^{-lj}X(t+j-1) = z^l X_l(t), \end{aligned}$$

d.h. auch i ist wohldefiniert. j ist ein Isomorphismus, da wegen $\sum_{l=1}^m z^{l(1-j)} = m\delta_{j1}$ für $m>1$ gilt:

$$j \circ i(X)(t) = \frac{1}{m}\sum_{l,j=1}^{m} z^{l-lj}X(t+j-1) = X(t).$$

Beweis des Theorems. $X, Y \in T_{c^m}\Lambda M, i(X) = (X_1, \dots, X_m), i(Y) = (Y_1, \dots, Y_m)$, dann gilt $X(t) = \sum_{k=1}^m z^k X_k(t), Y(t) = \sum_{k=1}^m z^k Y_k(t)$ und $X_k(t+j) = z^{jk}X(t), Y_k(t+j) = z^{jk}Y(t)$ und somit auch $\langle X_k, Y_l\rangle(t+1) = \langle z^k X_k(t), z_l Y_l(t)\rangle = z^{k-l}\langle X_k, Y_l\rangle$. Deshalb gilt:

$$H_{c^m}(1)(X,Y) = \sum_{k,l} z^{k-l}\int_0^m \{\langle \nabla X_k, \nabla Y_l\rangle - \langle R(X_k, \dot c)\dot c, Y_l\rangle\}\, dt$$

$$= \sum_{k,l}\left(z^{k-l} + z^{2(k-l)} + \ldots + z^{m(k-l)}\right)\cdot \int_0^1 \{\langle \nabla X_k, \nabla Y_l\rangle - \langle R(X_k, \dot c)\dot c, Y_l\rangle\}\, dt$$

$$= m\sum_{k=1}^{m} H_c(z^k)(X_k, Y_k)$$

Also kann die quadratische Form $H_c(1)$ auf $T_{c^m}\Lambda M$ mit der direkten Summe $\frac{1}{m}\bigoplus_{k=1}^m H_c(z^k)$ der quadratischen Formen mittels des Isomorphismus j aus dem Lemma identifiziert werden, d.h. insbesondere gilt a).

b) Wenn $X \in T_c^z\Lambda M$ und $H_c(z)(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_c^z\Lambda M$, dann ist X ein komplexes Jacobifeld längs c mit $X(1) = zX(0)$ und $\nabla X(1) = z\nabla X(0)$. Für ein differenzierbares Vektorfeld $Y \in T_c\Lambda M$ gilt nämlich nach Gleichung (6):

$$\begin{aligned} H(z)(X,Y) &= \langle \nabla X(1-), Y(1)\rangle - \langle \nabla X(0+), Y(0)\rangle \\ &= \langle \bar{z}\nabla X(1-) - \nabla X(0+), Y(0)\rangle. \end{aligned}$$

Also ist $H(z)(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_c^z\Lambda M$ nur, wenn $\nabla X(1) = z\nabla X(0)$. Dann gilt also

$$P_c(X(0), \nabla X(0)) = (X(1), \nabla X(1)) = z(X(0), \nabla X(0))$$

d.h. $(X(0), \nabla X(0)) \in \ker(P_c - \mathrm{id})$. Ungekehrt gilt für jedes Jacobifeld X längs c mit $(X(1), \nabla X(1)) = z(X(0), \nabla X(0)) : H_c(z)(X,Y) = 0$ für alle $Y \in T_c^z\Lambda M$.

c) Wir wählen wieder eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ des Einheitsintervalls, so daß es auf $c|[t_i, t_{i+1}]$ kein Paar konjugierter Punkte gibt. Sei J der Vektorraum der stetigen Vektorfelder X längs c, so daß $X|[t_i + l, t_{i+1} + l]$ ein Jacobifeld ist für alle $i = 0, \ldots, k-1; l \in \mathbb{Z}^+$ mit $\langle X, \dot{c}\rangle = 0$. $J_{\mathbb{C}}$ sei die Komplexifizierung von J. Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$J(z) := \{X \in J_{\mathbb{C}} \mid X(t+1) = zX(t) \, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

$J(z)$ ist ein endlich–dimensionaler Unterraum von $T_c\Lambda M$ und wie in Abschnitt 3.2 sieht man sofort, daß $\mathrm{ind} H(z)|J(z) = \mathrm{ind} H(z) = I(z)$. Also definiert $z \mapsto \tilde{H}(z) = H(z)|J(z)$ eine stetige Kurve in den Hermiteschen Formen des endlich–dimensionalen Vektorraums $J(z)$, d.h. die Eigenwerte der bzgl. $\langle ., . \rangle$ selbstadjungierten Endomorphismen $A(z)$ mit $\langle A(z)X, Y\rangle = H(z)(X,Y)$, $X, Y \in J(z)$ variieren auch stetig. Also kann sich die Anzahl der negativen Eigenwerte nur in Punkten z ändern, für die 0 ein Eigenwert ist, und sie kann sich höchstens um die Multiplizität des Eigenwertes 0 in diesem Punkt ändern.

d) ergibt sich aus $H(z)(\bar{X}, \bar{Y}) = \overline{H(\bar{z})(X,Y)}$ □

4.2 Sprungzahlen, der mittlere Index und die Poincaré–Exponenten

Bott beweist in [Bo2, thm.C] auch, daß die Sprungzahlen $S^{\pm}(z)$ nur abhängen von der Konjugationsklasse der linearisierten Poincaré–Abbildung P_c in der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n-1)$, d.h. nur von der symplektischen Normalform von P_c. Wie diese Abhängigkeit von der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Normalform explizit beschrieben werden kann, wurde u.a. von Klingenberg in [Kl2] und Ballmann–Thorbergsson–Ziller in [BTZ1] gezeigt:

Theorem 4.3 [BTZ1, 2.13] *Die linearisierte Poincaré–Abbildung P_c der geschlossenen Geodätischen c habe die Normalform*

$$\bigoplus_z \bigoplus_{j=1}^{j(z)} J_{\mathbb{R}}(z, m_j, \sigma_j)\,.$$

Sei z ein Eigenwert von P_c , d.h. $N_c(z)$ ist positiv, dann gilt für die Sprungzahlen für $z \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} S^+(z) &= \#\{J_{\mathbb{R}}(z,m,\sigma)\,|\, m \equiv 0 \pmod 2, \sigma = +1 \\ &\qquad \textit{oder } m \equiv 1 \pmod 2, \sigma = +1\} \\ S^-(z) &= \#\{J_{\mathbb{R}}(z,m,\sigma)\,|\, m \equiv 0 \pmod 2, \sigma = +1 \\ &\qquad \textit{oder } m \equiv 1 \pmod 2, \sigma = -1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S^+(\pm 1) = S^-(\pm 1) = \#\{J_{\mathbb{R}}(\pm 1, m, \sigma) \;|\; m \equiv 0 \pmod 2, \sigma = +1 \\ \textit{oder } m \equiv 1 \pmod 2, \sigma = 0\}\,. \end{aligned}$$

Die Differenz $\mathrm{ind}(c^m) - m\mathrm{ind}(c)$ ist bestimmt durch die symplektische Normalform von P_c, denn:

$$\mathrm{ind}(c^m) - m\mathrm{ind}(c) = \sum_{z^m=1} (I(z) - I(1))$$

und

$$I(\exp 2\pi il/m) - I(1) \quad =$$

$$S^+(1) + \left\{ \sum_{0<r<l/m} S^+(\exp(2\pi ir)) - S^-(\exp(2\pi ir)) \right\} \quad - \quad S^-(\exp(2\pi il/m)).$$

Seien $z_j = \exp(2\pi i\lambda_j)\,,\ 1 \leq j \leq l-1\,,\ l \leq n\,,\ 0 \leq \lambda_j \leq 1/2$ die Eigenwerte von P_c mit $|z| = 1, \mathrm{Im} z > 0$ und $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{l-1} \leq \lambda_l = 1/2$. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ nennen wir die *Poincaré–Exponenten* von P_c bzw. von c. Sei $I_j = I(\exp(2\pi i\lambda))$ für $\lambda \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j), 0 < j \leq l$ und $I_1 = I_2$ falls $\lambda_1 = 0$ sowie $I_l = I_{l-1}$ falls $\lambda_{l-1} = 1/2$. Aus der Definition des Riemann–Integrals erhält man das

Korollar 4.4 [Bo2, cor.1] *Der* mittlere Index

$$\alpha_c = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{ind}(c^m)}{m}$$

existiert und es gilt

$$\alpha_c = \int_0^1 I(\exp(2\pi it))dt = 2\sum_{j=1}^{l} I_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})$$

Wenn $\alpha_c = 0$*, dann ist* $\mathrm{ind}(c^m) = 0$ *für alle* $m \geq 1$*.*

Zu einer symplektischen Abbildung P_c mit Sprungzahlen $S^{\pm}(z)$ definieren wir die *totale Sprungzahl*

$$S := S^+(1) + S^-(-1) + \sum_{|z|=1\,,\,\mathrm{Im} z>0} \left\{ S^+(z) + S^-(z) \right\}.$$

Wenn $V(z) := \ker((P_c - \mathrm{id})^{n-1})$ der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert z ist, dann definieren wir

$$V_{co} := \bigoplus_{|z|=1\,,\,\mathrm{Im} z\geq 0} V(z) \;\;,\;\; V_{nc} := \bigoplus_{|z|>1} V(z) \oplus V(\bar{z}^{-1})\,.$$

$E_{\mathbb{C}} = V_{nc} \oplus V_{co}$ ist eine Zerlegung von $E_{\mathbb{C}}$ in P–invariante, nicht–degenerierte ω–orthogonale Unterräume.

Falls $V_{co} = 0$ ist, d.h. falls kein Eigenwert von P_c auf dem Einheitskreis liegt , so heißt P_c bzw. die geschlossene Geodätische c *hyperbolisch*. Dann ist also $N_c(z) = 0$ für alle $z \in S^1$, d.h. es gilt $\mathrm{null}(c^m) = 0$ für alle $m \geq 1$ und $I : S^1 \to \mathbb{N}_0$ ist konstant, d.h. die totale Sprungzahl $S = 0$. Für eine hyperbolische geschlossene Geodätische gilt also

$$\mathrm{ind}(c^m) = m \, \mathrm{ind}(c)$$

für alle $m \geq 1$, d.h. für den mittleren Index erhalten wir $\alpha_c = \mathrm{ind}(c)$. Allgemein sei $L_c := 1/2 \dim V_{co}$. Wir erhalten das

Lemma 4.5 *Für die totale Sprungzahl S einer symplektischen Abbildung gilt*

$$S \leq L := \frac{1}{2} \dim V_{co}.$$

Beweis. Es genügt den Fall $E = J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma)$ für $|z| = 1$ zu behandeln. Sei $\mathrm{Im} z > 0$, dann gilt für $m = 1$ nach Theorem 4.3 $S^+(z) + S^-(z) = 1$ und für $m \geq 2$ gilt $S^+(z) + S^-(z) \leq 2$. Falls $z = \pm 1$, dann gilt $S^+(z) = S^-(z) \leq 1 \leq m$. Da $\dim J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma) \geq 2m$, falls $|z| = 1, \mathrm{Im} z > 0$ oder $z = \pm 1, m \equiv 1 \pmod 2$ sowie $\dim J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma) = m$, falls $z = \pm 1, m \equiv 0 \pmod 2$, so gilt für $|z| = 1, \mathrm{Im} z > 0$:

$$S^+(z) + S^-(z) \leq \frac{1}{2} \dim J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma)$$

und für $z = \pm 1$:

$$S^+(z) = S^-(z) \leq \frac{1}{2} \dim J_{\mathbb{R}}(z, m, \sigma).$$

Daraus ergibt sich dann die Behauptung auch im allgemeinen Fall $\square$

Damit können wir nun eine Abschätzung für die Differenz $\mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c$ geben:

Theorem 4.6 [Ra1, 1.4] *Sei c eine geschlossene Geodätische auf M mit $\dim(M) = n$. Sei P_c die linearisierte Poincaré Abbildung, S_c die totale Sprungzahl und $2L_c$ die Dimension des maximalen Unterraums V_{co} von E, auf dem P_c kompakt ist. Wenn α_c der mittlere Index von c ist, dann gilt für alle $m \geq 1$:*

$$|\mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c| \leq S_c \leq L_c \leq n-1.$$

Beweis. Wir setzen $e(x) := \exp(2\pi i x)$ und definieren zwei Folgen $(x_j), (y_j)$, $j = 1, \ldots, m$ durch $x_1 = 0, x_{2i} = i/m$ für $1 < 2i \leq m$ und $x_{2i+1} = i/m$ für $1 < 2i+1 \leq m$ sowie $y_i = i/(2m)$. Dann gilt nach Theorem 4.1 a) :

$$\begin{aligned} |\mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c| &= \left| \sum_{i=1}^{m} I(e(x_i)) - 2m \int_0^{1/2} I(e(x))dx \right| \\ &\leq 2m \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |I(e(x_i)) - I(e(x))|\, dx \leq S, \end{aligned}$$

da für $y < x$:

$$I(e(x)) = I(e(y)) + S^+(e(y)) + \sum_{y<z<x} \Big(S^+(e(z)) - S^-(e(z)) \Big) + S^-(e(x))$$

$\square$

Bemerkung 4.7 a) Die Folge

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c &= \mathrm{ind}(c^m) - m\,\mathrm{ind}(c) + m(\mathrm{ind}(c) - \alpha_c) \\ &= \sum_{z^m=1} (I(z) - I(1)) + m \int_0^1 (I(1) - I(e(x)))\, dx \end{aligned}$$

ist also nur von der symplektischen Normalform von P_c abhängig , da sie sich durch Sprungzahlen ausdrücken läßt. Wir zeigen nun, daß die Abschätzung im folgenden Sinne optimal ist. Es gibt für jedes vorgegebene $L \leq n-1$ eine symplektische Normalform für P_c, so daß

$$\limsup_{m\to\infty}(\mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c) = \limsup_{m\to\infty}(m\alpha_c - \mathrm{ind}(c^m)) = L = S.$$

Wähle $z = \exp(i\phi), \phi = 2\pi\lambda, \lambda \in (0, 1/2) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und sei $E = \bigoplus_{i=1}^{L} J_{\mathbb{R}}(z, 1, 1) \oplus V_{nc}$ die symplektische Normalform von P_c, d.h.

$$P_c | J_{\mathbb{R}}(z, 1, 1) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\operatorname{ind}(c^m) - m\alpha_c = (1 + [2am] - 2am)L$. Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Da λ irrational ist, folgt daraus die Behauptung.

b) Wenn alle Geodätischen $c : \mathbb{R} \to M$ auf M geschlossen sind mit der gleichen minimalen Periode $\omega > 0$, d.h. wenn $c(t + \omega) = c(t)$, dann gilt für jede geschlossene Geodätische c : $P_c = \mathrm{id}$. Dies folgt, da Jacobifelder Variationsvektorfelder von Variationen mit Geodätischen sind. Beispiele solcher Mannigfaltigkeiten sind die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1 und die Zoll–Metriken auf S^2. Dann gilt $E = \bigoplus_{i=1}^{n-1} J_R(1, 1, 0)$ woraus nach Theorem 4.3 $S^+(1) = S^-(1) = n - 1$ folgt, d.h. $\operatorname{ind}(c^m) = m(\operatorname{ind}(c) + (n-1)) - (n-1)$. Für die Funktion $I(z)$ (den z–Index von c) kann man analog wie für $I(1) = \operatorname{ind}(c)$ einen Indexsatz beweisen, der $I(z)$ durch den Ω–Index $\operatorname{ind}_\Omega(c)$ ausdrückt. Dann erhält man folgende Abschätzung ([BTZ1], S.226):

$$\operatorname{ind}_\Omega(c) \le I(z) \le \operatorname{ind}_\Omega(c) + n - 1$$

Daraus folgt durch Integration

$$0 \le \alpha_c - \operatorname{ind}_\Omega(c) \le n - 1 .$$

Da $\alpha_{c^m} = \lim_{k\to\infty}(\operatorname{ind}(c^{mk})/k) = m\alpha_c$ folgt also auch

$$0 \le m\alpha_c - \operatorname{ind}_\Omega(c^m) \le n - 1 . \tag{7}$$

Der mittlere Index beschreibt also auch das lineare Wachstum der Folge $\operatorname{ind}_\Omega(c^m)$ der Anzahl der konjugierten Punkte zu $p = c(0)$ längs $c|[0, m)$.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Poincaré Exponenten $\lambda_j, j = 1, \ldots, l-1$ und dem mittleren Index angeben.

Wir benutzen die Formel für α_c aus Korollar 4.4 und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 2\sum_{j=1}^{l} I_j(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \\ &= I_l + 2\sum_{j=1}^{l-1} \Big(S^-(z_j) - S^+(z_j)\Big)\, \lambda_j \end{aligned} \tag{8}$$

4.3 Spezielle invariante Untermengen der symplektischen Gruppe

In Kapitel 9 werden wir Störungsargumente anwenden, um eine gegebene Riemannsche Metrik in der Nähe einer nicht–hyperbolischen geschlossenen Geodätischen c so zu stören, daß c Geodätische bleibt, aber ihr mittlerer Index geändert wird, indem die Poincaré–Exponenten geändert werden. Deshalb müssen wir sicherstellen, daß nicht alle Differenzen $S^+(z_j) - S^-(z_j)$ verschwinden. Da die Sprungzahlen symplektische Invarianten sind, definieren wir eine unter Konjugation invariante Untermenge der symplektischen Gruppe, in der diese Differenzen nicht verschwinden. Dann werden wir später annehmen, daß die linearisierte Poincaré–Abbildung P_c in dieser Untermenge liegt. Diese Untermenge soll offen und dicht sein.

Wenn ω die Standard symplektische 2–Form auf $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$$

dann heißt

$$\mathrm{Sp}(n) = \{P \in \mathrm{Gl}(2n; \mathbb{R}) \,|\, \omega(Px, Py) = \omega(x, y)\, \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

die *symplektische Gruppe*. Auf der Komplexifizierung $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ von $\mathbb{R}^{2n}$ induziert ω eine nicht–degenerierte hermitesche Form ω_h:

$$\omega_h(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \omega(x_1, y_2) - \omega(y_1, x_2) + i(\omega(x_1, x_2) + \omega(y_1, y_2))\,.$$

Die kanonische Erweiterung einer symplektischen linearen Abbildung $P \in \mathrm{Sp}(n)$ auf $\mathbb{C}^{2n}$ erhält dann ω_h. Wenn $z \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $P \in \mathrm{Sp}(n)$ ist, dann auch $z^{-1}, \bar{z}$ und $\bar{z}^{-1}$. Für $P \in \mathrm{Sp}(n), z \in \mathbb{C}$ sei

$$d(P,z) := \dim_{\mathbb{C}} \ker \left((P - z \cdot \mathrm{id})^{2n} : \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \right)$$

die Dimension des verallgemeinerten Eigenraums zum Wert z. Dann definieren wir folgende Untermengen der symplektischen Gruppe:

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(n) := \{ P \in \mathrm{Sp}(n) \,|\, d(P,1) = d(P,-1) = 0 \}$$

d.h. für ein Element $P \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$ sind $+1$ und -1 keine Eigenwerte, und

$$\mathrm{Sp}^*(n) := \left\{ P \in \widetilde{\mathrm{Sp}} \,|\, \forall z \in \mathbb{C} : d(P,z) \leq 1 \right\},$$

d.h. jedes Element $P \in \mathrm{Sp}^*(n)$ hat nur einfache Eigenwerte. $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$ und $\mathrm{Sp}^*(n)$ sind invariante Untermengen, d.h. mit P gehört auch jede zu P konjugierte lineare Abbildung zu diesen Mengen, denn Eigenwerte sind Invarianten der Konjugationsklassen.

Satz 4.8 $\mathrm{Sp}^*(n)$ *ist eine offene und dichte invariante Untermenge von* $\mathrm{Sp}(n)$.

Beweis. Ein symplektischer Endomorphismus P liegt in $\mathrm{Sp}^*(n)$ genau dann, wenn die Diskriminante $D(\chi(P))$ des charakteristischen Polynoms nicht verschwindet. Also ist $\mathrm{Sp}^*(n)$ eine offene Untermenge von $\mathrm{Sp}(n)$. Wäre $\mathrm{Sp}^*(n)$ nicht dicht in $\mathrm{Sp}(n)$, so gäbe es ein $P \in \mathrm{Sp}(n)$ mit einer offenen Umgebung U von P, so daß $U \cap \mathrm{Sp}^*(n) = \emptyset$. Dann kann man eine analytische Kurve $t \in [0,1] \mapsto P(t) \in \mathrm{Sp}(n)$ wählen mit $P(0) = P$ und $P(1) \in \mathrm{Sp}^*(n)$. Dann definiert die Diskriminante $f(t) = D(\chi(P(t))), t \in [0,1]$ des charakteristischen Polynoms von $P(t)$ eine analytischeFunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Da f in einer Umgebung von 0 verschwindet, gilt auch $f(1) = 0$, d.h. $P(1) \notin \mathrm{Sp}^*(n)$ $\square$

Für $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definieren wir die invariante Untermenge

$$\mathrm{Sp}(l;n) := \{P \in \mathrm{Sp}^*(n) | \sum_{|z|=1, \mathrm{Im} z>0} d(P,z) = l\}$$

Da $d(P,z) \leq 1$ für $P \in \mathrm{Sp}^*(n)$ und da für $z \notin \mathbb{R}, |z| \neq 1$ mit z auch $z^{-1}, \bar{z}, \bar{z}^{-1}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von P sind, ist $\mathrm{Sp}(l;n)$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Sp}^*(n)$ und es gilt

$$\mathrm{Sp}^*(n) = \bigcup_{l=0}^{n} \mathrm{Sp}(l;n).$$

Wir wenden uns nun den möglichen Normalformen von $P \in \mathrm{Sp}(l;n)$ zu: Seien $z_j = \exp(2\pi i \lambda_j), j = 1, \ldots, l, \lambda_j \in (0, 1/2)$ die Eigenwerte mit $|z_j| = 1, \mathrm{Im} z_j > 0$ und $z_j, j = l+1, \ldots, m$ die Eigenwerte mit $|z_j| > 1$ und $\mathrm{Im} z_j \geq 0$. Dann gibt es nach Theorem 4.3 eine Zerlegung

$$\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{j=1}^{m} J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, \sigma_j)$$

mit $\sigma_j \in \{1, -1\}$ für $j \leq l$ und $\sigma_j = 0$ für $j \geq l+1$. Bezüglich einer symplektischen Basis hat $P|J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, \sigma_j)$ die folgende Matrixdarstellung:

a) Falls $z_j = \exp(2\pi i \lambda_j)$, d.h. $j = 1, \ldots, l, \sigma_j \in \{1, -1\}$:

$$P|J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, \sigma_j) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda_j) & -\sigma_j \sin(2\pi\lambda_j) \\ \sigma_j \sin(2\pi\lambda_j) & \cos(2\pi\lambda_j) \end{pmatrix}$$

b) Falls $|z_j| > 1$ und $\mathrm{Im}(z_j) = 0$, so ist

$$P|J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, 0) = \begin{pmatrix} z_j & 0 \\ 0 & z_j^{-1} \end{pmatrix}$$

c) Falls $|z_j| > 1$ und $\mathrm{Im}(z_j) > 0$, so ist

$$P|J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, 0) = \begin{pmatrix} z_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_j^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{z}_j^{-1} \end{pmatrix}$$

Lemma 4.9 *Wenn* $P \in \mathrm{Sp}(l;n)$ *und wenn* $z_j = \exp(2\pi i \lambda_j), \lambda_j \in (0, 1/2), j = 1, \ldots, l$ *die Eigenwerte von* P *sind mit* $\mathrm{Im} z > 0$ *und* $|z| = 1$ *sind, dann gilt für die Differenz*

$$\epsilon_j := S^-(z_j) - S^+(z_j)$$

der Sprungzahlen $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ *für* $j = 1, \ldots, l$.

Beweis. Nach Theorem 4.3 gilt für die oben hergeleiteten Normalformen von Abbildungen in $\mathrm{Sp}(l;n)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= S^-(z_j) - S^+(z_j) = \\ &= \#\{J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, \sigma_j) | \sigma_j = -1\} - \#\{J_{\mathbb{R}}(z_j, 1, \sigma_j) | \sigma_j = +1\} \\ &\in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

□

Für den mittleren Index α_c einer geschlossenen Geodätischen c , deren linearisierte Poincaré–Abbildung P_c in $\mathrm{Sp}(l;n)$ liegt, gilt also nach Gleichung (8):

$$\alpha_c = I_l + 2\sum_{j=1}^{L} \epsilon_j \lambda_j = \mathrm{ind}(c^2) - \mathrm{ind}(c) + 2\sum_{j=1}^{L} \epsilon_j \lambda_j \tag{9}$$

mit $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$.

Das folgende Lemma werden wir in Kapitel 9 benötigen. Dazu führen wir die analytische Abbildung

$$f : \mathrm{Sp}(l;n) \to (0, 1/2)^l, f(P) = (\lambda_1(P), \ldots, \lambda_l(P))$$

ein, die jedem $P \in \mathrm{Sp}(l;n)$ die Poincaré–Exponenten $\lambda_j \in (0, 1/2)$ der Eigenwerte $z_j = \exp(2\pi i \lambda_j)$ zuordnet, wobei $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. Dann erhalten wir das

Lemma 4.10 *Wenn p ein nicht–triviales Polynom mit l Variablen und mit reellen Koeffizienten ist, dann ist $Q(p) := \{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \,|\, p(x_1, \ldots, x_l) \neq 0\}$ offen und dicht in $\mathbb{R}^l$ und das Urbild*

$$f^{-1}(Q(p)) = \{P \in \mathrm{Sp}(l; n) \,|\, p(\lambda_1(P), \ldots, \lambda_l(P)) \neq 0\}$$

ist eine offene und dichte invariante Teilmenge von $\mathrm{Sp}(l; n)$*.*

Beweis. Als Komplement einer algebraischen Menge ist $Q(p)$ offen und dicht in $\mathbb{R}^l$, also ist $f^{-1}(Q(p))$ offen in $\mathrm{Sp}(l; n)$. Wäre $f^{-1}(Q(p))$ nicht dicht in $\mathrm{Sp}(l; n)$, so gäbe es eine analytische Kurve $t \in [0, 1] \mapsto P(t) \in \mathrm{Sp}(l; n)$ mit $p(f(P(t))) = 0$ für $t \in [0, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ und $p(f(P(1))) \neq 0$ im Widerspruch zur Analytizität.

5 Geodätische von Finsler–Metriken

5.1 Eigenschaften von Finsler–Metriken

Wenn g eine Riemannsche Metrik auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist, dann definiert die Funktion $F(X) = \sqrt{g(X,X)}$ auf dem Tangentialbündel TM ein reguläres Variationsproblem auf M. Eine allgemeinere Klasse solcher regulären Variationsprobleme liefern Finsler–Metriken.

Definition 5.1 *Eine stetige Funktion $F : TM \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ auf dem Tangentialbündel TM einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heißt* Finsler–Metrik, *falls gilt:*

a)$F|TM - T^0M$ ist C^∞–differenzierbar, dabei ist T^0M der Nullschnitt, der also mit M identifiziert werden kann.

b) F ist auf jedem Tangentialraum T_pM positiv homogen vom Grad 1, d.h. $F(\lambda X) = \lambda F(X)$ für alle $\lambda \geq 0$ und $X \in TM$.

c) $F(X) = 0$ genau dann, wenn $X \in T^0M$.

d) Die zweite Ableitung von F^2 in Faserrichtung ist positiv definit.

Die Finsler–Metrik F heißt *symmetrisch*, falls zusätzlich $F(-X) = F(X)$ für alle $X \in TM$ gilt. Jede Riemannsche Metrik g bestimmt also eine symmetrische Finsler–Metrik F durch $F(X) = \sqrt{g(X,X)}$. Umgekehrt bestimmt die Differenzierbarkeit von F^2, ob die Finsler–Metrik von einer Riemannschen Metrik induziert ist. Wenn nämlich F^2 zweimal stetig differenzierbar ist auf TM, dann wird F von einer Riemannschen Metrik induziert.

Von nun an sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Finsler–Metrik F. Wir wählen eine Riemannsche Metrik g auf M, die also auf dem freien Schleifenraum ΛM eine Riemannsche Metrik $\langle .,. \rangle_1$ induziert. Da die von verschiedenen Metriken g und g' auf M induzierten Metriken $\langle .,. \rangle_1, \langle .,. \rangle_1'$ auf ΛM äquivalent sind, sind die weiteren Überlegungen von der

Wahl der Metrik g unabhängig. Seien $p, q \in M$ und $\Omega_{pq}M$ die H^1–Kurven in M mit Anfangspunkt $p = c(0)$ und Endpunkt $q = c(1)$. Dann nennen wir die kritischen Punkte des Variationsproblems $c \mapsto 1/2 \int_0^1 F^2(\dot{c}(t))dt$ *Geodätische* der Finsler–Metrik. Die Bedingung d), die in der Variationsrechnung *Legendre–Bedingung* heißt, garantiert die lokale Eindeutigkeit der Geodätischen. $L(c) = \int_0^1 F(\dot{c}(t))dt$ ist die *Länge* der Kurve c. Bedingung b) impliziert, daß die Länge einer Kurve unabhängig ist von der Parametrisierung. Dann wird durch $\bar{d}(p, q) := \inf\{L(c)|c \in \Omega_{pq}M\}$ eine *Pseudometrik* auf M erklärt, d.h. es gilt

a) $\bar{d}(p, q) \geq 0$ und $\bar{d}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

b) $\bar{d}(p, q) + \bar{d}(q, r) \geq \bar{d}(p, r)$

Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es dann eine Kurve c, die p und q verbindet mit Länge $L(c) = \bar{d}(p, q)$, d.h. eine *Minimale* und diese Minimale ist eine Geodätische. Lokal ist diese Minimale eindeutig, dies folgt aus der Legendre–Bedingung. Falls F symmetrisch ist, ist $\bar{d}$ eine Metrik, d.h. eine symmetrische Pseudometrik. Dann ist die induzierte Toplogie gleich der Toplogie der Mannigfaltigkeit. Im allgemeinen Fall wird durch $d(p, q) := \bar{d}(p, q) + \bar{d}(q, p)$ eine Metrik auf M definiert. Da M kompakt ist, gibt es zu jeder Finsler–Metrik F eine Zahl $k \geq 1$ so daß $k^{-1}g(X, X) \leq F^2(X, X) \leq kg(X, X)$ für alle Tangentialvektoren X. Insbesondere sind also die Metrik , die von der Riemannschen Metrik g auf M induziert wird, und die Metrik d, die von F induziert wird, äquivalent. Also stimmen die induzierten Topologien mit der auf M gegebenen überein. Wenn c eine geschlossene Geodätische einer nicht–symmetrischen Finsler–Metrik ist, dann ist die geschlossene Kurve θc mit der entgegengesetzten Orientierung nicht notwendig eine Geodätische. Deshalb nennen wir für nicht–symmetrische Finsler–Metriken zwei geschlossene Geodätische $c_1, c_2 : S^1 \to M$ *geometrisch gleich* , falls $c_1(S^1) = c_2(S^1)$ und falls beide Geodätischen in der gleichen Richtung durchlaufen werden. Es gilt der

Satz 5.2 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Finsler–Metrik F. Dann gibt es eine Zahl $\eta = \eta(M) > 0$, so daß es zwischen zwei Punkten $p, q \in M$ mit $\bar{d}(p,q) < \eta$ genau eine minimale Geodätische gibt. Diese Geodätische hängt lokal differenzierbar von den Endpunkten ab.*

Finsler–Metriken lassen sich sehr übersichtlich in der Terminologie Hamiltonscher Systeme beschreiben, vgl. [Ma1], [Zi2]. Dazu wählen wir lokale Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n)$ auf der Mannigfaltigkeit M, sie induzieren Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ auf dem Tangentialbündel TM (bezüglich der Basis $\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial q_n$) und Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ auf dem Kotangentialbündel T^*M (bezüglich der dualen Basis $dq_1, \ldots, dq_n$). Die kanonische symplektische Form ω des Kotangentialbündels T^*M ist in diesen Koordinaten gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \, .$$

T^*M mit der Form ω ist eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Eine stetige Funktion $H : T^*M \to \mathbb{R}$ heißt eine *konvexe, vom Grade 2 positiv homogene Hamilton–Funktion* , falls $H \,|\, T^*M - T^{*0}M$ C^∞–differenzierbar ist, falls $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{i,j}$ positiv definit ist und $H(q, \lambda p) = \lambda^2 H(p,q)$ für $\lambda > 0$. Das Hamiltonsche Vektorfeld wird erklärt durch

$$dH = -\omega(X_H, .) \, ,$$

$\psi^t : T^*M \to T^*M$ sei der zugehörige *Hamiltonsche Fluß.* Einer solchen Hamilton–Funktion entspricht eine Finsler–Metrik. Wenn nämlich $\mathcal{L}_H : T^*M \to TM$,

$$\mathcal{L}_H(q,p) = \left(q, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$$

die zugehörige Legendre–Transformation ist, die ein C^∞–Diffeomorphismus von $T^*M - T^{*0}M$ auf $TM - T^0M$ ist, dann definiert die Gleichung

$$F^2 = 2H \circ \mathcal{L}_H^{-1}$$

eine Finsler–Metrik. Wenn $\tau : T^*M \to M$ die Fußpunktprojektion ist, dann ist die Kurve $c(t) = \tau(\psi^t(v))$ eine Geodätische der Finsler–Metrik. Insbesondere sind also die Projektionen periodischer Bahnen des Hamiltonschen Flusses geschlossene Geodätische auf M.

5.2 Das Energiefunktional einer Finsler–Metrik

In diesem Abschnitt geben wir Eigenschaften des Energiefunktionals einer Finsler–Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M an. Dabei stützen wir uns auf die Arbeiten [Me] und [Ma2].

Wir wählen eine beliebige Riemannsche Metrik g auf M, die dann – wie in Abschnitt 2.1 beschrieben – eine Riemannsche Metrik $g_1 = \langle ., . \rangle_1$ auf dem freien Schleifenraum ΛM induziert. Wir können $L = \frac{1}{2}F^2$ als Lagrange–Funktion auffassen. Das Energiefunktional

$$E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; E(\sigma) = \int_0^1 L(\dot{c}(t))dt$$

ist $C^{1,1}$–differenzierbar , d.h. E ist C^1 und die Ableitung ist lokal Lipschitzstetig.

Wenn $q(s,t) = (q_1(s,t), \ldots, q_n(s,t)), s \in (-\epsilon, \epsilon), t \in [0,1]$ eine Variation von geschlossenen C^2–differenzierbaren Kurven in lokalen Koordinaten mit $c(t) = q(0,t)$ ist und $W(t) = \frac{\partial q(0,t)}{\partial s}$ das Variationsvektorfeld ist, dann gilt

$$dE(c).W = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i}(c(t), \dot{c}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(c(t), \dot{c}(t)) \right\} \frac{\partial q_i}{\partial s}(0,t)dt$$

Ein kritischer Punkt von E löst also gerade die Euler–Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\,.$$

Die Lösungen sind die Punktkurven und die geschlossenen Geodätischen auf M.

E induziert ein Lipschitz–stetiges Gradientenvektorfeld grad$E$ durch

$$\langle \mathrm{grad} E(c), X \rangle_1 = dE(c).X$$

für $c \in \Lambda M, X \in T_c\Lambda M$. Das Energiefunktional erfüllt die Palais–Smale Bedingung, der Fluß zum Vektorfeld $-\mathrm{grad}E$ ist für alle $t \geq 0$ erklärt.

Da wir Morse–Theorie mit E als Morse–Funktion betreiben wollen, müssen wir auch 2. Ableitungen in kritischen Punkten betrachten. Dabei muß man beachten, daß L bzw. F im Nullschnitt i.a. nicht differenzierbar ist. Deshalb ist E nur in regulären Kurven (d.h. $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle t) 2–mal differenzierbar. Da Geodätische regulär sind, ist also die Indexform $d^2E(c)$ für eine geschlossene Geodätische erklärt. Sei $c : S^1 \to M$ eine geschlossene Geodätische, durch $N_\epsilon(S^1.c) = \{X \in T_{c(t)}M \,|\, t \in [0,1], |X| < \epsilon, \langle X, \dot{c}(t) \rangle = 0\}$ ist für genügend kleines $\epsilon > 0$ das Normalenbündel von c erklärt. $N_\epsilon(S^1.c)$ ist also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die Totalraum eines $(n-1)$–dimensionalen Scheibenbündels über S^1 ist. Dann gibt es auf $N_\epsilon(S^1.c)$ eine Riemannsche Metrik $\tilde{g}$, so daß c auch geschlossene Geodätische auf der *oskulierenden* Riemannschen Mannigfaltigkeit $(N_\epsilon(S^1.c), \tilde{g})$ ist, und daß die Indexformen der geschlossenen Geodätischen c bezüglich der Finsler–Metrik und der oskulierenden Metrik übereinstimmen (vgl. [Ma2, Kap.2]). Deshalb lassen sich die Ergebnisse der vorigen Kapitel auf geschlossene Geodätische von Finsler–Metriken übertragen.

Eine oskulierende Metrik gewinnt man so: Sei V eine Erweiterung von $\dot{c}$ auf $N_\epsilon(S^1.c)$, dann setze in den Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_n)$:

$$\tilde{g}_{ij}(q) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(V(q))\,.$$

Im Unterschied zum Riemannschen Fall und zum Fall einer symmetrischen Finsler–Metrik läßt für eine nicht–symmetrische Finsler–Metrik nur die Gruppe S^1, nicht aber die ganze Gruppe $\mathbb{O}(2)$ das Energiefunktional invariant. In den nächsten Kapiteln werden wir deshalb Morse–Theorie auf dem Quotienten $\Lambda M/S^1$ behandeln.

5.3 Beispiele von Finsler–Metriken mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen nach Katok

In der Arbeit [Ka] hat Katok Beispiele nicht–symmetrischer Finsler–Metriken auf Sphären mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen angegeben, vgl. auch [Zi2] und [Ma1]. Diese Beispiele lassen sich auch auf den kompakten Rang 1 symmetrischen Räumen konstruieren. Wir geben Eigenschaften dieser Metriken auf S^2 an, wir folgen der Darstellung in [Zi2]. Für S^2 erhalten wir eine Familie von holprigen nicht–symmetrischen Finsler–Metriken mit nur zwei geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen, die bis auf Orientierung dieselbe Kurve beschreiben.

Sei (S^2, g) die Standard Metrik und $\phi^t : S^2 \to S^2$ die Rotation um den Nordpol mit Winkel $2\pi t$ sowie V das zugehörige Killingfeld. Seien $H_0, H_1 : T^*M \to \mathbb{R}$ die Funktionen

$$H_0(X) = \sqrt{g^*(X,X)}\,,\; H_1(X) = X(V)\,,$$

wobei g^* die duale Metrik zu g auf T^*M ist. Setze

$$H_\mu = H_0 + \mu H_1\,,$$

dann ist $H(\mu) := \frac{1}{2}H_\mu^2$ für $0 \leq \mu < 1$ eine konvexe Hamilton Funktion, die positiv homogen vom Grade 2 ist. Die zugehörige Finsler–Metrik bezeichnen wir mit F_μ. Da ϕ^t eine Gruppe von Isometrien ist, kommutieren die Flüsse $\psi_t^{H_0}$ und $\psi_t^{H_1}$ von H_0 und H_1. Also gilt für den Fluß $\psi_t^{H_\mu}$ von H_μ:

$$\psi_t^{H_\mu} = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\mu t}^{H_1}$$

Wenn μ irrational ist, sind deshalb die beiden einzigen geschlossenen Geodätischen c_+, c_- von F_μ der Großkreis invariant unter ϕ_t (d.h. der Äquator) in beiden Richtungen durchlaufen. Dann gilt für die Längen bzgl. F_μ:

$$L(c_\pm) = \frac{2\pi}{1 \pm \mu}\,.$$

Längs der Geodätischen $c_\pm$ treten konjugierte Punkte nach dem Abstand π auf. Für die Folgen $\mathrm{ind}(c_\pm^m)$ erhält man

$$\mathrm{ind}(c_\pm^m) = 2\left[\frac{m}{1\pm\mu}\right] + 1 \tag{10}$$

und für die mittleren Indices

$$\alpha_\pm = \frac{2}{1\pm\mu}\,.$$

Da $\mathrm{ind}(c_\pm^m)$ für alle m ungerade ist, gilt für die Invarianten $\gamma_\pm = -1$.

Die Poincaré–Abbildungen $P_\pm$ von $c_\pm$ sind Rotationen um den Winkel $2\pi/(1\pm\mu)$, insbesondere sind alle Iterierten $c_\pm^m$ nicht–degeneriert, falls μ irrational ist. Die Finsler–Metriken $F_\mu, \mu \in (0,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sind also holprige nicht–symmetrische Finsler–Metriken mit nur zwei geschlossenen Geodätischen. Diese geschlossenen Geodätischen sind elliptisch.

Es ist bemerkenswert, daß für $\mu \to 1$

$$\mathrm{ind}(c_+) = 1\,,\ \mathrm{ind}(c_-) \to \infty\,. \tag{11}$$

Die Methode des Beweises des Satzes von Lusternik und Schnirelmann [LS], [Ba] und [Jo] läßt sich also nicht auf den Fall nicht–symmetrischer Finsler–Metriken übertragen. In diesem Fall gibt es nämlich 2 subordinierte Homologieklassen in Dimension 1 und 3. Wegen Gleichung (10) gibt es für $\mu > 1/2$ keine energievermindernde Deformation des 3–dimensionalen Zykels von einfachen Kurven, die keine Selbstschnitte produziert und an einer einfachen geschlossenen Geodätischen hängenbleibt, da der 3–dimensionale Zykel an der Iterierten c_+^2 oder c_+^3 hängenbleiben muß.

6 Lokale Homologie geschlossener Geodätischer

6.1 Die Morse–Ungleichungen

Für eine Finsler–Metrik F auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M betrachten wir das Energiefunktional $E : \Lambda M \to \mathbb{R}$. Die Topologie der Subniveaumengen $\Lambda^a M := \{c \in \Lambda M \,|\, E(c) \leq a\}$ ändert sich im allgemeinen, wenn a ein kritischer Wert ist, d.h. wenn es eine geschlossene Geodätische c mit $E(c) = a$ gibt. Deshalb untersuchen wir zunächst die lokale Homologie geschlossener Geodätischer, auch *kritische Gruppen* genannt. Den Zusammenhang zwischen diesen lokalen Größen und der Homologie von ΛM wird durch die *Morse–Ungleichungen* beschrieben. Wichtig wird hierbei sein, daß unsere Konstruktionen die S^1–Aktion mitberücksichtigen, d.h. unsere Konstruktionen werden meistens auf dem Quotientenraum $\bar{\Lambda} = \Lambda M/S^1$ durchgeführt, der keine Mannigfaltigkeit ist, da die S^1–Aktion nicht frei ist. Für eine Teilmenge V in $\Lambda M = \Lambda$ ist $\overline{V} := V/S^1$, und für $a > 0$ ist $V^a := V \cap \Lambda^a$. Für $c \in \Lambda M$ setzen wir $\Lambda(c) := \{d \in \Lambda \,|\, E(d) < E(c)\}$. Sei $c \in \Lambda M$ eine isolierte geschlossene Geodätische mit $E(c) = a$, so ist $S^1.c$ die kritische Bahn. Dann heißt für einen kommutativen Ring R mit 1

$$C_*(c; R) := H_*(\Lambda(c) \cup S^1.c\,,\, \Lambda(c); R)$$

die *kritische Gruppe* von c und

$$\overline{C}_*(c; R) := H_*(\overline{\Lambda(c) \cup S^1.c}\,,\, \overline{\Lambda(c)}; R)$$

die S^1*–kritische Gruppe* von c. Sei U eine S^1–invariante Tubenumgebung von $S^1.c$ in ΛM, d.h. U ist Totalraum eines Bündels über $S^1.c$, dessen Faser ein Abstandsball im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist, nach dem die Hilbertmannigfaltigkeit ΛM modelliert ist. Wir bezeichnen die Faser über c mit U_c. Wenn $\mathrm{mul}(c) = m$, dann ist U_c invariant unter der Untergruppe $\mathbb{Z}_m$ von S^1. Die $\mathbb{Z}_m$– Aktion auf U_c bestimmt ihrerseits eindeutig die S^1–Aktion auf U, es gilt $U = U_c \times_{\mathbb{Z}_m} S^1$. Hierbei operiert $\mathbb{Z}_m$ auf dem Produkt $U_c \times S^1$ wie folgt:

$$(g, u, z) \in \mathbb{Z}_m \times U_c \times S^1 \mapsto (g.u, g^{-1}.z) \in U_c \times S^1$$

und $U_c \times_{\mathbb{Z}_m} S^1 := U_c \times S^1/\mathbb{Z}_m$. Dann ist $\overline{U} = U/S^1 = U_c \times_{\mathbb{Z}_m} S^1/S^1 = U_c/\mathbb{Z}_m$. Es gilt also

$$\begin{aligned} C_*(c; R) &= H_*(\Lambda(c) \cup S^1.c\,,\, \Lambda(c); R) \\ &\cong H_*(U_c \cap \Lambda^a\,,\, \partial U_c \cap \Lambda^a; R) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{C}_*(c; R) &= H_*(\overline{\Lambda(c) \cup S^1.c}\,,\, \overline{\Lambda(c)}; R) \\ &\cong H_*((U_c \cup \Lambda^a)/\mathbb{Z}_m\,,\, (\partial U_c \cap \Lambda^a)/\mathbb{Z}_m; R) \end{aligned}$$

Wenn die Umgebung U klein genug gewählt ist, dann ist $E_c := E|U_c : U_c \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf der Hilbertmannigfaltigkeit U_c, die wir mit einer offenen Umgebung der 0 im Hilbertraum $\mathcal{H}$ identifizieren können. U_c trägt eine $\mathbb{Z}_m$–Aktion, bezüglich derer E_c invariant ist. Wir wählen zwei positive reguläre Werte $a < b$ des Energiefunktionals E und wir nehmen an, daß $\Lambda^a - \Lambda^b$ nur endlich viele kritische Bahnen $S^1.c_1, \ldots, S^1.c_k$ von geschlossenen Geodätischen enthält, dann sind für $j \geq 1$ und für einen Körper $K = R$ die *Morse–Zahlen* $M_j(\Lambda^b, \Lambda^a)$ von (Λ^b, Λ^a) bzw. $M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$ von $(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$ definiert durch

$$\begin{aligned} M_j(\Lambda^b, \Lambda^a) &:= \sum_{i=1}^{k} \dim C_j(c_i) \\ M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) &:= \sum_{i=1}^{k} \dim \overline{C}_j(c_i) \end{aligned}$$

Bei diesen Definitionen können wir auch den Fall $b = \infty$ zulassen, in diesem Fall nehmen wir an, daß die kritischen Bahnen $S^1.c$ isoliert sind und daß es zu jedem $j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ nur endlich viele kritische Bahnen $S^1.c$ gibt, für die $C_j(c) \neq 0$ ist. Sei außerdem

$$b_j(\Lambda^b, \Lambda^a; K) := \dim H_j(\Lambda^b, \Lambda^a; K)$$

bzw.

$$b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a; K) := \dim H_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a; K)$$

Wenn $\Lambda^b - \Lambda^a$ frei von geschlossenen Geodätischen ist, dann definiert der Gradientenfluß eine S^1–äquivarianten Retraktion von Λ^b nach Λ^a, d.h. dann gilt $M_j(\Lambda^b, \Lambda^a) = b_j(\Lambda^b, \Lambda^a) = 0$ und $M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) = b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) = 0$. Wenn das Intervall (a, b) genau einen kritischen Wert enthält, dann gilt

$$M_j(\Lambda^b, \Lambda^a) = b_j(\Lambda^b, \Lambda^a) \quad , \quad M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) = b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$$

für alle j. Der allgemeinen Zusammenhang zwischen den Betti–Zahlen $b_j(\Lambda^b, \Lambda^a)$ bzw. $b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$ und den Morse–Zahlen $M_j(\Lambda^b, \Lambda^a)$ bzw. $M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$ wird durch die Morse–Ungleichungen ausgedrückt. Dazu benutzen wir die *Morse–Reihen*

$$\begin{aligned} M(\Lambda^b, \Lambda^a)[t] &:= \sum_{j=0}^{\infty} M_j(\Lambda^b, \Lambda^a)\, t^j \\ M(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[t] &:= \sum_{j=0}^{\infty} M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)\, t^j \end{aligned}$$

und die *Poincaré–Reihen*

$$\begin{aligned} P(\Lambda^b, \Lambda^a)[t] &:= \sum_{j=0}^{\infty} b_j(\Lambda^b, \Lambda^a)\, t^j \\ P(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[t] &:= \sum_{j=0}^{\infty} b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)\, t^j \quad . \end{aligned}$$

Für $b = \infty$ sind diese Reihen formale Potenzreihen.

Dann folgt das

Theorem 6.1 (Morse–Ungleichungen) *Wenn $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, a < b$ zwei reguläre Werte des Energiefunktionals sind (wir fassen ∞ als regulären Wert auf), und wenn die kritischen Bahnen $S^1.c$ von geschlossenen Geodätischen mit $a < E(c) < b$ isoliert sind und es zu jedem $j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ nur endlich viele kritische Bahnen $S^1.c$ gibt mit $M_j(\Lambda^b, \Lambda^a) \neq 0$ bzw. $M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) \neq 0$, dann gilt:*

Es gibt eine formale Potenzreihe $Q[t] = \sum_{j=1}^{\infty} q_j t^j$ bzw. $\overline{Q}[t] = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{q}_j t^j$ mit nicht–negativen ganzzahligen Koeffizienten q_j bzw. $\bar{q}_j$, so daß

$$M(\Lambda^b, \Lambda^a)[t] = P(\Lambda^b, \Lambda^a)[t] + (1+t)Q[t]$$

bzw.

$$M(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[t] = P(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[t] + (1+t)\overline{Q}[t]\,.$$

Bemerkung 6.2 a) Insbesondere gilt also

$$M_j(\Lambda^b, \Lambda^a) \geq b_j(\Lambda^b, \Lambda^a) \quad , \quad M_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) \geq b_j(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$$

b) Für $b = \infty, a = 0$ folgt für alle $j \geq 1$

$$0 \leq \overline{q}_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} M_k(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0) + \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} b_k(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0)$$

für $b < \infty$:

$$M(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[-1] = P(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)[-1]$$

d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M_k(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(\bar{\Lambda}^b, \bar{\Lambda}^a)$$

6.2 Das verallgemeinerte äquivariante Morse–Lemma

Wenn F eine Riemannsche Metrik ist, dann ist das Energiefunktional E C^∞–differenzierbar. Dann kann man eine Version des *verallgemeinerten Morse–Lemma* anwenden. Wenn F aber nicht Riemannsch ist, d.h. F ist im Nullschnitt nicht differenzierbar, dann ist E nur eine $C^{1,1}$– Funktion, d.h. C^1–differenzierbar mit lokal Lipschitz–stetigen Differential. Eine Verallgemeinerung des Morse–Lemma für nicht–degenerierte kritische Punkte und für $C^{1,1}$–Funktionen, die zusätzlich C^2–differenzierbar in kritischen Punkten sind, wird von Mercuri–Palmieri in [MP] bewiesen. Da wir aber auch die lokale Homologie degenerierter geschlossener Geodätischer behandeln wollen, benutzen wir eine *endlich–dimensionale Approximation* von ΛM, die bereits von Morse benutzt wurde, vgl. [Mi, Kap. 16].

Sei $a > 0$ und sei $\eta > 0$ eine Zahl, so daß alle Geodätischen der Länge $< \eta$ auf M minimal sind.

Wähle $k \in \mathbb{Z}^+$, so daß $1/k < \eta^2/(2a)$ und definiere

$$\Lambda(k,a) := \left\{ c \in \Lambda^a \,\middle|\, c \left| \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right] \right. \text{ ist Geodätische } \right\}$$

Da

$$\begin{aligned} d^2\left(c\left(\frac{i}{k}\right), c\left(\frac{i+1}{k}\right)\right) &\leq L^2\left(c\left|\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right]\right.\right) \\ &\leq \frac{2}{k} E\left(c\left|\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right]\right.\right) \leq \frac{2a}{k} < \eta^2 \end{aligned}$$

ist $c \in \Lambda(k,a)$ eindeutig bestimmt durch die Punkte $c(0), c\left(\frac{1}{k}\right), \ldots, c\left(\frac{k-1}{k}\right) \in M \times \ldots \times M$ und hängt differenzierbar von diesen Punkten ab. Wir können also $\Lambda(k,a)$ mit der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit (mit Rand)

$$\left\{ (p_1, \ldots, p_k) \in M \times \ldots \times M \,\middle|\, d^2(p_i, p_{i+1}) \leq \frac{2a}{k} \, \forall i = 1, \ldots, k \right\}$$

(wobei wir die Indices modulo k nehmen) der Mannigfaltigkeit $M \times \ldots \times M$ identifizieren. $\Lambda(k,a)$ trägt also die Struktur einer kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M \cdot k$. $\Lambda(k,a)$ trägt auch eine kanonische $\mathbb{Z}_k$–Aktion, sie wird erzeugt durch die Abbildung

$$(p_1, p_2, \ldots, p_k) \mapsto (p_2, \ldots, p_k, p_1)$$

$\Lambda(k,a)$ läßt sich also mit einer $\mathbb{Z}_k$–invarianten differenzierbaren kompakten Untermannifaltigkeit des S^1–Raums ΛM identifizieren (bzgl. der Standard-inklusion $\mathbb{Z}_k \subset S^1$). In [Mi, 16.2] wird eine starke Deformationsretraktion des Raums Λ^a auf den Raum $\Lambda(k,a)$ definiert. Sie läßt sich leicht modifizieren, so daß sie $\mathbb{Z}_k$–äquivariant ist. Dazu definieren wir für $u \in [0,1]$, $r_u : \Lambda^a \to \Lambda^a$, für $i = 0, \ldots, k-1$:

$$\begin{aligned} r_u(c) \Big| \left[\frac{i}{k}, \frac{i+u}{k}\right] &= \text{minimale Geodätische von} \\ & \qquad c\left(\frac{i}{k}\right) \text{ nach } c\left(\frac{i+u}{k}\right) \\ r_u(c) \Big| \left[\frac{i+u}{k}, \frac{i+1}{k}\right] &= c \Big| \left[\frac{i+u}{k}, \frac{i+1}{k}\right] \end{aligned}$$

Dann ist $r_0 = \mathrm{id}, r_t \,|\, \Lambda(k,a) = \mathrm{id}$ sowie $r_1(\Lambda^a) = \Lambda(k,a)$. Außerdem ist r_u $\mathbb{Z}_k$–invariant.

Die Einschränkung

$$E' : \Lambda(k,a) \longrightarrow \mathbb{R}$$

des Energiefunktionals, die sich auch als

$$E'(p_1, \ldots, p_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} d^2(p_i, p_{i+1})$$

schreiben läßt, ist eine $C^{1,1}$–differenzierbare Funktion. Sei $c : S^1 \to M$ eine geschlossene Geodätische mit $E(c) < a$ und mit dem Normalenbündel $p : N(S^1.c) \to S^1.c$ in Λ. Dabei ist $S^1.c \cong S^1/\mathbb{Z}_m$, wenn $m = \mathrm{mul}(c)$. Sei $p^{-1}(z.c) = N(z.c)$ die Faser über $z.c, z \in S^1$ und sei DN ein Scheibenbündel und SN das zugehörige Sphärenbündel, wobei

$$\begin{aligned} DN &:= \{X \in N(S^1.c) \,|\, \|X\|_1 \leq \epsilon\} \\ SN &:= \{X \in N(S^1.c) \,|\, \|X\|_1 = \epsilon\} \end{aligned}$$

Dabei sei $\epsilon > 0$ so klein, daß wir durch die Exponentialabbildung DN mit einer Tubenumgebung von $S^1.c$ in Λ identifizieren können. Jede Faser

$$DN(z.c) = p^{-1}(z.c) \cap DN$$

ist $\mathbb{Z}_m$–invariant und es gilt

$$DN(S^1.c) = DN(c) \times_{\mathbb{Z}_m} S^1$$

sowie

$$SN(S^1.c) = SN(c) \times_{\mathbb{Z}_m} S^1 \, .$$

Die Einschränkung

$$D'N(S^1.c) := DN(S^1.c) \cap \Lambda(k,a)$$

ist eine Tubenumgebung von $S^1.c$ in $\Lambda(k,a)$ mit Rand

$$S'N(S^1.c) := SN(S^1.c) \cap \Lambda(k,a) \, .$$

Seien

$$D'N(z.c) := DN(z.c) \cap \Lambda(k,a) \, , \; S'N(z.c) := SN(z.c) \cap \Lambda(k,a)$$

die entsprechenden Fasern.

Für genügend kleines $\epsilon > 0$ enthält $D'N(S^1.c)$ nur reguläre Kurven, d.h. $E \,|\, D'N(S^1.c)$ bzw. $E'_c := E' \,|\, D'N(c)$ ist C^∞– differenzierbar. Auf diese Einschränkungen können wir also eine äquivariante Version des verallgemeinerten Morse–Lemmas anwenden. Aus der 1. und 2. Variationsformel für die Energie schließt man, daß $c \in \Lambda(k,a)$ kritischer Punkt von E' ist genau dann, wenn c eine geschlossene Geodätische ist, und daß der Index und die Nullität von $d^2E'(c)$ gleich dem Index und der Nullität von $d^2E(c)$ sind. Dies folgt, da die Hessesche $d^2E(c)$ auf dem orthogonalen Komplement der gebrochenen Jacobifelder mit Sprungstellen $i/k, i = 0, \ldots, k-1$ positiv definit ist (siehe Abschnitt 3.2). Auf $DN(S^1.c), m = \mathrm{mul}(c)$ betrachten wir folgende zu $g_1 = \langle .,. \rangle_1$ äquivalente Riemannsche Metrik

$$g_{1,m}(X,Y) := \int_0^1 g(X,Y)dt + \frac{1}{m^2}\int_0^1 g(\nabla X, \nabla Y)dt.$$

Bezüglich dieser Metrik ist die durch Gleichung (1) definierte Abbildung

$$^m : DN(S^1.c) \to DN(S^1.c) \quad , \quad d \mapsto d^m$$

eine Isometrie.

Das *verallgemeinerte äquivariante Morse–Lemma* für die $\mathbb{Z}_m$– invariante C^∞–Funktion $E'_c : DN'(c) \to \mathbb{R}$ lautet dann

Theorem 6.3 [GM1, lem.1], [MW, (8.3)] *Sei c eine isolierte geschlossene Geodätische mit* $\mathrm{ind}(c) = i, \mathrm{null}(c) = l, \mathrm{mul}(c) = m$ *und der Tubenumgebung $DN'(S^1.c)$ von $S^1.c$ in $\Lambda(k,a)$, $E(c) < a$. Dann gibt es eine $\mathbb{Z}_m$–invariante orthogonale Zerlegung von $T_c^\perp \Lambda M(k,a) = \{X \in T_c\Lambda M(k,a) \mid \langle X.\dot{c}\rangle = 0\}$:*

$$T_c\Lambda(k,a) = V^- \oplus V^0 \oplus V^+ = \{(x_-, x_0, x_+)\}$$

mit $\dim V^- = i, \dim V^0 = l$ *und eine $\mathbb{Z}_m$–invariante offene Umgebung U der 0 in $T_c\Lambda(k,a)$ sowie zwei $\mathbb{Z}_m$–äquivariante Diffeomorphismen*

$$\psi : U \to \psi(U) \subset DN'(c)$$

und

$$\phi : U^0 := U \cap V^0 \to W(c) := \phi(U^0) \subset DN'(c)$$

mit $\psi(0) = \phi(0) = c$, so daß

$$E'_c(\psi(x_-, x_0, x_+)) = E'_c(c) - |x_-|^2 + |x_+|^2 + E'_c \circ \phi(x_0)$$

und $d(E'_c \circ \phi)(0) = d^2(E'_c \circ \phi)(0) = 0$.

$W(c)$ heißt dann *charakteristische Mannigfaltigkeit* von E'_c in c. Wenn wir mit $\mathrm{grad}_m E'_c$ den Gradienten von E'_c bzgl. $g_{1,m}$ bezeichnen, dann gilt für die charakteristische Mannigfaltigkeit $W(c)$, daß $\mathrm{grad}_m E'_c(x) \in T_x W(c)$ für $x \in W(c)$. Das *Shifting Theorem* von Gromoll–Meyer [GM1, theorem] besagt, daß die kritischen Gruppen einer geschlossenen Geodätischen bestimmt sind durch den Index und die kritischen Gruppen des degenerierten Teils $E_c'|W(c)$. Da wir die Gruppenaktionen miteinbeziehen, benötigen wir eine modifizierte Version des Shifting Theorems. Die Umgebung $U^- = U \cap V^-$ von 0 in V^- ist eine $\mathbb{Z}_m$–invariante i–dimensionale Scheibe, die wir im folgenden mit $D(c)$ (*negative Scheibe*) bezeichnen, ihr Rand $S(c)$ ist also eine $(i-1)$–dimensionale Sphäre.

Lemma 6.4 *Sei c eine isolierte geschlossene Geodätische mit $i = \operatorname{ind}(c), m = \operatorname{mul}(c), l = \operatorname{null}(c), b = E(c)$ und sei $W(c)$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit und $D(c)$ die i–dimensionale negative Scheibe mit $S(c) = \partial D(c)$, sowie $W^b(c) := W(c) \cap \Lambda^b$. Dann gilt für die S^1–kritische Gruppe*

$$\begin{aligned}\overline{C}_*(c; R) &\cong H_*\Big((D(c) \times W^b(c))/\mathbb{Z}_m, (D(c) \times W^b(c) - \{(c,c)\})/\mathbb{Z}_m; R\Big)\\ &\cong H_*\Big(\big((D(c), S(c)) \times (W^b(c), W^b(c) - \{c\})\big)/\mathbb{Z}_m; R\Big)\end{aligned}$$

Hierbei operiert $\mathbb{Z}_m$ auf $D(c) \times W^b(c)$ diagonal.

Bemerkung 6.5 Wenn c nicht–degeneriert ist ($l = 0$), dann ist c isoliert und es gilt

$$\overline{C}_*(c : R) \cong H_*(D(c)/\mathbb{Z}_m, S(c)/\mathbb{Z}_m; R).$$

Beweis. Wir zeigen, daß es für die $\mathbb{Z}_m$–invariante Umgebung $\psi(U)$ aus Theorem 6.3 eine $\mathbb{Z}_m$–äquivariante starke Deformationsretraktion

$$\begin{gathered} r : \Big(\psi(U) \cap \Lambda^b\,,\ (\psi(U) \cap \Lambda^b) - \{c\}\Big) \longrightarrow \\ \Big(\psi(U^-) \times W^b(c), \psi(U^-) \times W^b(c) - \{c, c\}\Big)\end{gathered}$$

gibt.

Sei $f : U \to \mathbb{R}$

$$f(x_-, x_o, x_+) = b - |x_-|^2 + |x_+|^2 + f \circ \phi(x_0)$$

und sei $f^b := \{x \in U \,|\, f(x) \leq b\}$. Wir werden zeigen, daß es eine $\mathbb{Z}_m$– starke Deformationsretraktion

$$r : \Big(U \cap f^b, U \cap f^b - \{0\}\Big) \to \Big(U^- \times U^{0,b}, U^- \times U^{0,b} - \{0\}\Big)$$

mit $U^{0,b} = U^0 \cap f^b$ gibt, woraus die Behauptung folgt, da ψ ein Diffeomorphismus ist. Da der Gradient $\mathrm{grad}_m E'_c \,|\, W(c)$ tangential an $W(c)$ ist, gibt es für ein hinreichned kleines $\epsilon > 0$ eine $\mathbb{Z}_m$–äquivariante Deformation

$$\eta_t : U^{0,b+\epsilon} := \psi^{-1}(W(c) \cap \Lambda(k, b+\epsilon)) \to U^{0,b+\epsilon}$$

mit $f \circ \psi(\eta_t(w)) \leq f \circ \psi(w)$ für $t > 0$ und mit

$$\eta_0 = \mathrm{id} \quad , \quad \eta_1 : U^{0,b+\epsilon} \to U^{0,b}.$$

Dann definiert

$$\Delta(t, x_-, x_0, x_+) = x_- + (1-t)x_+ + \eta_t(x_0)$$

die gewünschte $\mathbb{Z}_m$–äquivariante starke Deformationsretraktion $\square$

6.3 Die S^1–kritischen Gruppen einer geschlossenen Geodätischen

Aus dem Lemma 6.4 können wir nun mit Hilfe der folgenden homologischen Überlegungen die S^1–kritischen Gruppen berechnen:

Sei (X, A) ein Hausdorff Raum mit $\mathbb{Z}_m$–Aktion, und sei A ein $\mathbb{Z}_m$ –invarianter abgeschlossener Unterraum. Dann wird X aus A durch *Anheften äquivarianter n–Zellen* $(e_i^n)_{i \in L}$ gebildet, falls:

a) e_i^n ist für jedes $i \in L$ ein abgeschlossener $\mathbb{Z}_m$–Unterraum von X.

b) $\dot{e}_i^n := e_i^n \cap A$, dann gilt $(e_i^n - \dot{e}_i^n) \cap (e_j^n - e_j^n) = \emptyset$ für $i \neq j$.

c) $X = A \cup \bigcup_{i \in L} e_i^n$ und X hat eine Topologie kohärent mit $\{A, e_i^n\}$.

Für jedes $i \in L$ gibt es einen Teiler m_i von m und eine $\mathbb{Z}_m$–äquivariante Abbildung

$$f_i : \mathbb{Z}_{m/m_i} \times (D^n, S^{n-1}) \to (e_i^n, \dot{e}_i^n)$$

so daß $f_i(\mathbb{Z}_{m/m_i} \times D^n) = e_i^n$ und f_i bildet $\mathbb{Z}_{m/m_i} \times (D^n - S^{n-1})$ homöomorph auf $e_i^n - \dot{e}_i^n$ ab. Die $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf $\mathbb{Z}_{m/m_i} \times D^n$ ist durch die kanonische $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf $\mathbb{Z}_{m/m_i}$ und die triviale $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf D^n erklärt. Dann ist ein *relativer* $\mathbb{Z}_m$*–CW Komplex* (X, A) ein Hausdorff $\mathbb{Z}_m$–Raum X mit abgeschlossenem $\mathbb{Z}_m$–Unterraum A und abgeschlossenen $\mathbb{Z}_m$–Unterräumen $(X, A)^k$(*das k–Skelett*), so daß gilt:

a) $(X, A)^0$ wird aus A durch Anheften äquivarianter 0–Zellen und für $k \geq 1$ wird $(X, A)^k$ aus $(X, A)^{k-1}$ durch Anheften äquivarianter k–Zellen gebildet.

b) $X = \bigcup_{k \geq 0}(X, A)^k$ und X hat die Topologie kohärent mit $\{(X, A)^k\}_{k \geq 0}$.

Für einen relativen $\mathbb{Z}_m$–CW Komplex ist der *zellulare Kettenkomplex* $C_*(X, A; R) = (C_n(X, A; R), \partial_n)$ für einen kommutativen Koeffizientenring R mit 1 durch $C_n(X, A; R) = H_n((X, A)^n, (X, A)^{n-1}; R)$ erklärt. Der Randoperator $\partial_n : C_n(X, A; R) \to C_{n-1}(X, A; R)$ ist der Randoperator der langen exakten Homologiesequenz des Tripels $((X, A)^n, (X, A)^{n-1}, (X, A)^{n-2})$. Dies ist die übliche Definition für CW–Komplexe, die Homologie $H_*(C(X, A; R))$ des zellularen Kettenkomplexes ist isomorph zur singulären Homologie $H_*(X, A; R)$. Zusätzlich besitzt $C_*(X, A; R)$ eine $\mathbb{Z}_m$–Aktion, die erzeugt wird durch den Homomorphismus

$$T_* : C_*(X, A; R) \to C_*(X, A; R)\,.$$

T_* wird durch die Abbildung

$$T : \Big((X, A)^n, (X, A)^{n-1}\Big) \to \Big((X, A)^n, (X, A)^{n-1}\Big)\ ,$$

die die $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf X erzeugt, induziert. Wenn $e_i^n = f_i(\mathbb{Z}_{m/m_i} \times D^n), i \in L_n$ die äquivarianten n–Zellen sind mit der charakteristischen Funktion f_i, dann können wir $e_i^n = f_i(\{0\} \times D^n)$ identifizieren mit dem entsprechenden Element in $C_n(X, A; R)$. Dann ist

$$S_n = \{T_*^j e_i^n \,|\, j = 1, \ldots, m/m_i; i = 1, \ldots, L_n\}$$

eine Basis des freien R–Moduls $C_n(X, A; R)$. Das Bild $C_*(X, A; R)^m$ der Kettenabbildung

$$\sum_{j=1}^{m} T_*^j : C_*(X, A; R) \to C_*(X, A; R)^m \subset C_*(X, A; R)$$

ist der *Kettenkomplex der $\mathbb{Z}_m$–invarianten Ketten*. Wenn $\pi : (X, A) \to (X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m)$ die Projektion auf den Quotienten mit induzierter Kettenabbildung π_* ist, dann ist die Menge $S_n = \{\pi_*(e_i^n); i \in L_n\}$ eine Basis von $C_*(X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m)$. Die Kettenabbildung

$$\tau : C_*(X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m; R) \to C_*(X, A; R)\,,\ \tau(\pi_*(w)) = \sum_{j=1}^{m} T_*^j.w$$

heißt der *$\mathbb{Z}_m$–Transfer*. Der $\mathbb{Z}_m$–Transfer ist wohldefiniert, schreibt man nämlich

$$w = \sum_{i \in L_n} \sum_{j=1}^{m/m_i} w_{i,j} T_*^j(e_i)$$

in der Basis S_n mit $w_{i,j} \in R$, dann gilt

$$\pi_*(w) = \sum_{i \in L_n} \left(\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \right) \pi_*(e_i).$$

Wenn also $\pi_*(w) = 0$, so ist $\sum_{j=1}^{m/m_i} w_{i,j} = 0$ für alle i und somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} T_*^j w &= \sum_{j=1}^{m} T_*^j \sum_{i \in L_n} \sum_{k=1}^{m/m_i} w_{i,k} T_*^k e_i \\ &= m_i \sum_{i \in L_n} \sum_{k=1}^{m/m_i} \left(\sum_{l=1}^{m/m_i} w_{i,l} \right) T_*^k e_i = 0 \end{aligned}$$

Für die Komposition von Projektion und $\mathbb{Z}_m$–Transfer gilt

$$\pi_* \circ \tau(\pi_*(w)) = m\pi_*(w)$$

für alle $w \in C(X, A; R)$. Die $\mathbb{Z}_m$*–invariante Homologie* ist definiert durch

$$H_*(X, A; R)^{\mathbb{Z}_m} := H_*(C(X, A; R)^{\mathbb{Z}_m}).$$

Deshalb gilt

Satz 6.6 *Sei (X, A) ein relativer $\mathbb{Z}_m$–CW Komplex und $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_p$, p eine Primzahl ($p \in \mathbb{P}$) mit $p \not| m$. Wenn $\pi : (X, A) \to (X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m)$ die kanonische Projektion ist, dann ist*

$$\pi_* : H_*(X, A; K) \to H_*(X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m; K)$$

surjektiv und

$$\pi_* : H_*(X, A; K)^{\mathbb{Z}_m} \to H_*(X/\mathbb{Z}_m, A/\mathbb{Z}_m; K)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung 6.7 Wenn $\sigma := \sum_{i=1}^m T^i : H_*(X, A; K) \to H_*(X, A; K)$ dann folgt, daß $H_*(X, A; K)^{\mathbb{Z}_m} \cong H_*(X, A; K)/\ker(\sigma)$. Auf der negativen Scheibe $D(c)$ haben wir eine orthogonale $\mathbb{Z}_m$–Aktion. Sei $c = c_0^m, m = \mathrm{mul}(c)$. Dann kann man eine explizite $\mathbb{Z}_m$–CW Struktur für $D(c)$ mit Unterkomplex $S(c)$ angeben, aus der man auch die Homologie $H_*(D(c)/\mathbb{Z}_m, S(c)/\mathbb{Z}_m; K)$ für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p berechnen kann. Eine solche Zellenzerlegung wurde für eine Primzahl $m = p$ von Švarc [Sv, Kap. 1] angegeben, vgl. auch [Kl1, 4.1.4] und [Ra2, 1.10]. Um $H_*(D(c)/\mathbb{Z}_m, S(c)/\mathbb{Z}_m; K)$ zu berechnen, falls $\mathrm{char} K = \infty$ oder $\mathrm{char} K \not| m$ genügt es nach Satz 6.6 zu untersuchen, ob das Erzeugende T_* der $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf $H_*(D(c), S(c); K) \cong H_*(D^i, S^i; K)$ orientierungserhaltend oder –umkehrend operiert. Dieses Verhalten wird von der folgenden metrischen Invariante γ_c einer primen geschlossenen Geodätischen c kontrolliert:

Definition 6.8 Sei c eine prime geschlossene Geodätische. Dann ist $\gamma_c \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ definiert durch

a) $|\gamma_c| = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{ind}(c^2) \equiv \mathrm{ind}(c) \pmod 2$

b) $\gamma_c > 0$ genau dann, wenn $\mathrm{ind}(c) \equiv 0 \pmod 2$

Nach Theorem 4.1 gilt insbesondere, daß die Parität von $\mathrm{ind}(c^m)$ nur von der Parität von m abhängt. Wenn $|\gamma_c| = 1$, so ist $\mathrm{ind}(c^m) \equiv \mathrm{ind}(c) \pmod 2$ für alle $m > 0$. Wenn $|\gamma_c| = 1/2$, so gilt $\mathrm{ind}(c^{2l}) \equiv \mathrm{ind}(c^{2l-1}) + 1 \pmod 2$ für alle $l \geq 1$. Sei nun T Erzeugendes der orthogonalen $\mathbb{Z}_m$–Aktion auf der Scheibe $D(c^m)$ und c eine prime geschlossene Geodätische. Dann ist das Bild der Scheibe $D(c)$ unter der Abbildung ${}^m : D(c) \to D(c^m)$ die Fixpunktmenge von T auf $D(c^m)$ und falls m gerade ist, so ist das Bild der Abbildung ${}^{m/2} : D(c^2) \to D(c^m)$ die Unterscheibe $D_2(c^m)$ von $D(c^m)$, die invariant unter T^2 ist. Die Dimension der Unterscheibe von $D(c^m)$, auf der T als $-\mathrm{id}$ operiert, ist also für gerades m gleich der Differenz $\mathrm{ind}(c^2) - \mathrm{ind}(c)$. Auf der zu $D_2(c^m)$ orthogonalen Unterscheibe operiert T orientierungserhaltend. Also gilt $T_* \,|\, H_i(D(c^m), S(c^m); K) = \mathrm{id}$ genau dann, wenn $\mathrm{ind}(c^2) - \mathrm{ind}(c) \equiv 2\gamma_c \equiv 0 \pmod 2$. Somit gilt das

Lemma 6.9 *Sei c eine prime geschlossene Geodätische, $m \geq 1$. Dann gilt für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_p, p \not| m$ und $i = \mathrm{ind}(c^m)$:*

$$H_*(D(c^m)/\mathbb{Z}_m, S(c^m)/\mathbb{Z}_m; K) \cong \begin{cases} H_*(D^i, S^{i-1}; K) & ; \quad m \equiv 1 \pmod 2 \\ & \quad\;\; \textit{oder } |\gamma_c| = 1 \\ 0 & ; \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

Für die anderen endlichen Körper erhalten wir z.B. aus der Zellenzerlegung:

Satz 6.10 *Sei c eine prime geschlossene Geodätische, $m \geq 1, p \in \mathbb{P}, m = p^r m'$, $p \not| m'$ sei $i = \mathrm{ind}(c^m)$ und $a_p = \mathrm{ind}(c^{m'})$.*

a) Falls $|\gamma_c| = 1$ *oder* $m \equiv 1 \pmod 2$, *so gilt:*

$$H_j(D(c^m)/\mathbb{Z}_m, S(c^m)/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p & ; \quad \min\{a_p + 2, i\} \le j \le i \\ \\ 0 & ; \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

b) Falls $|\gamma_c| = 1/2$ *und falls* $m \equiv 0 \pmod 2$, *so gilt:*

$$H_j(D(c^m)/\mathbb{Z}_m, S(c^m)/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & ; \quad p = 2 \textit{ und} \\ & \quad\;\; a_2 + 2 \le j \le i \\ \\ 0 & ; \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

und $H_*(D(c^m)/\mathbb{Z}_m, S(c^m)/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z}_q) = 0$ *für alle ungeraden Primzahlen* q.

Auf der charakteristischen Mannigfaltigkeit $W(c)$ operiert die $\mathbb{Z}_m$–Aktion durch Isometrien. $W^b(c)$ ist ein starker Deformationsretrakt der $\mathbb{Z}_m$–Mannigfaltigkeit $W^{b+\epsilon}(c)$ (mit Rand) für genügend kleines $\epsilon > 0$. Deshalb hat $W^b(c)$ nach Ergebnissen von S.Illman [Il, th.2.6] und T.Matumoto [Ma, (4.4)] den $\mathbb{Z}_m$–Homotopietyp eines $\mathbb{Z}_m$–CW Komplexes.

Für einen relativen $\mathbb{Z}_m$–CW Komplex (X, A) und einen Körper K mit $\mathrm{char} K = \infty$ oder $\mathrm{char} K \not| m$ gilt wegen $T_*^m = \mathrm{id} : T_* h = \pm h$ für $h \in H_*(X, A; K)$. Wir definieren für $\eta \in \{\pm 1\}$:

$$H_*(X, A; K)^\eta := \{h \in H_*(X, A; K) \,|\, T_* h = \eta \cdot h\} .$$

Für ungerades m ist also $H_*(X, A; K) = H_*(X, A; K)^1$, allgemein ist

$$H_*(X, A; K) = H_*(X, A; K)^1 \oplus H_*(X, A; K)^{-1} .$$

Wenn $\sigma_\eta := \sum_{i=1}^m (\eta T)^i$, dann gilt

$$H_*(X, A; K)^\eta \cong H_*(X, A; K)/\ker(\sigma_\eta)$$

und somit nach Bemerkung 6.7

$$H_*(X, A; K)^{\mathbb{Z}_m} \cong H_*(X, A; K)^1 .$$

Satz 6.11 *Sei c eine isolierte geschlossene Geodätische mit $i = \mathrm{ind}(c), m = \mathrm{mul}(c)$, der negaiven Scheibe $D(c)$ und der charakteristischen Mannigfaltigkeit $W(c)$. Dann gilt für einen Körper K mit $\mathrm{char}K = \infty$ oder $\mathrm{char}K \not| m$:*

$$\overline{C}_*(c;K) \cong H_{*-i}\left((W(c) \cap \Lambda(c)) \cup \{c\}\,, W(c) \cap \Lambda(c); K\right)^{\eta}$$

mit $\eta = \eta_c = 1$, falls $m \equiv 1 \pmod 2$ oder $|\gamma_c| = 1$ und $\eta = -1$, falls $m \equiv 0 \pmod 2$ und $|\gamma_c| = 1/2$.

Beweis. $(D,S) := (D(c), S(c))$ und $(W, W^-) := ((W(c) \cap \Lambda(c)) \cup \{c\}\,, W(c) \cap \Lambda(c))$ sind bis auf $\mathbb{Z}_m$–Homotopieäquivalenz relative $\mathbb{Z}_m$–CW Komplexe. Die Aktion wird erzeugt durch die Abbildungen $T_1 : D \to D$ und $T_2 : W \to W$. Da D kompakt ist, ist dann auch $(D,S) \times (W,W^-)$ ein relativer $\mathbb{Z}_m$–CW Komplex, die $\mathbb{Z}_m$–Aktion wird erzeugt durch $T = (T_1, T_2) : D \times W \to D \times W$. Nach Lemma 6.4 gilt:

$$\begin{aligned} H_*\left(((D,S) \times (W,W^-))/\mathbb{Z}_m\right) &\cong H_*\left((D,S) \times (W,W^-)\right)^{\mathbb{Z}_m} \\ &\cong \left(H_*(D,S) \otimes H_*(W,W^-)\right)/\mathrm{ker}\sigma_1 \end{aligned}$$

mit $\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} T^j$. Sei a ein Erzeugendes von $H_i(D,S)$ und b ein Erzeugendes von $H_*(W,W^-)$. Dann gilt $T_* a = \eta \cdot a$ und somit $T_*(a \otimes b) = (\eta a \otimes T_{2*} b) = a \otimes b$ genau dann, wenn $T_{2*} b = \eta b$ und damit folgt die Behauptung □

Wenn alle Iterierten c^m von c nicht–degeneriert sind, d.h. $\mathrm{null}(c^m) = 0$ für alle $m \geq 1$, dann besteht die charakteristische Mannigfaltigkeit $W(c^m)$ nur aus einem Punkt, vgl. Bemerkung 6.5. Wir erhalten also das

Korollar 6.12 *Wenn für alle $m \geq 1$ gilt: $\mathrm{null}(c^m) = 0$, dann gilt für die kritische Gruppe ($K = \mathbb{Q}$ oder $\mathrm{char}K \not| m$).*

$$C_*(c) \cong \begin{cases} H_*(D^i, S^{i-1}) \otimes H_*(S^1) & , \quad \textit{falls } m \equiv 1 \pmod 2 \\ & \quad \textit{oder } |\gamma_c| = 1 \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

und für die S^1–kritische Gruppe

$$\overline{C}_*(c) \cong \begin{cases} H_*(D^i, S^{i-1}) & , \quad \textit{falls } m \equiv 1 \pmod 2 \\ & \quad\ \textit{oder } |\gamma_c| = 1 \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

Für den allgemeinen Fall erhalten wir den

Satz 6.13 *(*vgl. [MW, cor. 8.4]*) Sei $c = c_0^m$ eine isolierte geschlossene Geodätische, $m = \mathrm{mul}(c)$, $i = \mathrm{ind}(c), l = \mathrm{null}(c), b = E(c)$. Dann gilt für einen Körper mit Charakteristik* 0 *oder prim zu m:*

a) $b_j(c;K) := \dim C_j(c;K)$ und $\overline{b}_j(c;K) := \dim \overline{C}_j(c;K)$ sind endlich für alle i und $b_j(c;K) = \overline{b}_j(c;K) = 0$, falls $j < i$ oder $j > i + l$.

b) Wenn c ein lokales Minimum ist von $E'_c|W(c)$, dann gilt

$$\overline{b}_j(c;K) = \begin{cases} \delta_{ij} & ; \ \textit{falls } |\gamma_{c_0}| = 1 \\ & \quad \textit{oder } m \equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & ; \ \textit{sonst} \end{cases}$$

c) Wenn c ein lokales Maximum ist von $E'_c|W(c)$, dann gilt:

$$\overline{C}_{i+l}(c;K) \cong H_l((W(c) \cap \Lambda(c)) \cup \{c\}\, ,\, W(c) \cap \Lambda(c); K)^\eta$$

mit $\eta = \eta_c$ und $\overline{C}_j(c;K) = 0$ für $j \neq i + l$.

d) Wenn c weder lokales Minimum noch lokales Maximum ist von $E'_c|W(c)$, dann gilt

$$b_i(c;K) = b_{i+l}(c;K) = \overline{b}_i(c;K) = \overline{b}_{i+l}(c;K) = 0$$

Beweis. a) c ist isolierter kritischer Punkt von $E'_c|DN'(c)$, wobei $DN'(c)$ ein ϵ–Ball $B_\epsilon(c)$ um c ist. Dann gibt es eine $\mathbb{Z}_m$–invariante Funktion f :

$B_\epsilon(c) \to \mathbb{R}$ mit nur nicht–degenerierten kritischen Punkten (eine *Morse–Funktion*), die außerhalb von $B_{\epsilon/2}(c)$ mit E'_c übereinstimmt. Eine solche Morse–Funktion kann in jeder C^2–Umgebung von E'_c gefunden werden. Kritische Punkte von Morse–Funktionen sind isoliert (vgl. Bemerkung 6.5), deshalb gibt es nur endlich viele kritische Punkte. Nach den Morse–Ungleichungen 6.1 gilt dann, daß $b_j(c; K)$ endlich ist. Da $W^b(c)$ ein starker $\mathbb{Z}_m$–Deformationsretrakt der l–dimensionalen $\mathbb{Z}_m$–Mannigfaltigkeit mit Rand $W^{b+\epsilon}(c)$ für genügend kleines $\epsilon > 0$ ist, gilt $b_j(W^b(c), W^b(c) - \{c\}) \neq 0$ nur für $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$. Daraus folgt nach Satz 6.11 die Behauptung.

b) Wenn c lokales Minimum von $E'_c|W(c)$ ist, dann ist $W^b(c) = \{c\}$, d.h. $b_j(W^b(c), W^b(C) - \{c\}; K) = \delta_{j0}$. Daraus folgt nach Satz 6.11 die Behauptung.

c) Wenn c lokales Maximum von $E'_c|W(c)$ ist, dann ist $W^b(c) = W(c)$, d.h. $b_j(W^b(c), W^b(c) - \{c\}; K) = \delta_{jl}$ Daraus folgt wiederum nach Satz 6.11 die Behauptung.

d) Da c kein lokales Minimum von $E'_c|W(c)$ ist, so gilt $W^b(c) - \{c\} \neq \emptyset$ und c läßt sich durch einen Weg in $W^b(c)$ mit $W^b(c) - \{c\}$ verbinden. Deshalb ist $H_0(W^b(c), W^b(c) - \{c\}) = 0$. Jede stetige Abbildung

$$f : S^{l-1} \to W^b(c) - \{c\}$$

läßt sich zu einer stetigen Abbildung $f_1 : D^l \to W(c)$ erweitern. Da $E'_c|W(c)$ außer c keine kritischen Punkte besitzt, gibt es eine zu f_1 homotope Abbildung f_2 relativ zu S^{l-1} mit $f_2 : D^l \to W^b(c)$. Da c kein lokales Maximum der Funktion $E'_c|W(c)$ ist, ist c innerer Punkt von $f_2(D^l)$, deshalb gibt es eine stetige Erweiterung f_3 von f mit

$$f_3 : D^l \to W^b(c) - \{c\},$$

weshalb dann $H_l(W^b(c), W^b(c) - \{c\}) = 0$.

Bemerkung 6.14 Wenn also $\overline{C}_{k_1}(c;K) \neq 0$ und $\overline{C}_{k_2}(c;K) \neq 0$, dann gilt $|k_1 - k_2| \leq l - 2$. Wenn $n = \dim M = 2$, so ist $\mathrm{null}(c) \leq 2n - 2 = 2$. Also gilt im Falle $n = 2$:

$$\#\{j \,|\, \overline{C}_j(c;K) \neq 0\} \leq 1$$

Falls dann $\bar{b}_j(c;K) \neq 0$ für $j = i$ oder $j = i + l$ so ist $\bar{b}_j(c;K) = 1$, d.h. falls $\bar{b}_j(c;K) > 1$, so ist $l = 2$ und $j = i + 1$.

7 Metriken mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen

In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß für Finsler–Metriken mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen auf einer kompakten Mannigfaltigkeit eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit durch metrische Invarianten (insbesondere die mittleren Indices) der geschlossenen Geodätischen ausgedrückt werden kann. Für *holprige* Metriken ist dieses Ergebnis enthalten in [Ra1]. Eine Finsler–Mannigfaltigkeit hat *nur endlich viele geschlossene Geodätische*, wenn es nur endlich viele geometrisch verschiedene geschlossene Geodätische gibt, d.h. wenn es nur endlich viele Türme von kritischen Bahnen in ΛM gibt.

7.1 Der Beitrag geschlossener Geodätischer mit positivem mittleren Index zum Morse–Polynom

Sei c eine isolierte geschlossene Geodätische. Dann definiere für jedes $j \geq 0, m \geq 1$

$$M_{m,j}(c) = \dim \overline{C}_j(c^m;\mathbb{Q})$$

Von nun an werden wir –wenn nicht anders angegeben– $\mathbb{Q}$ als Koeffizientenkörper verwenden. Nach Satz 6.13 a) sind diese Zahlen endlich. Wie in Kapitel 6 sei $DN'(S^1.c)$ eine Tubenumgebung der kritischen Bahn $S^1.c$ in $\Lambda(k,a)$ und $DN'(c)$ eine Faser dieser Tubenumgebung, die man mit einer Faser des Normalenbündels von $S^1.c$ identifizieren kann. Bezüglich der modifizierten Metrik $g_{1,m}$ auf $DN'(c^m)$ ist die Abbildung

$$\phi^m : DN'(c) \to DN'(c) \quad , \quad \tilde{c} \mapsto \tilde{c}^m$$

eine Isometrie. Sei $DN'_m(c^m) := (DN'(c))^m = \{\tilde{c}^m \mid \tilde{c} \in DN'(c)\}$. Da $E\,|DN'(c^m)$ $\mathbb{Z}_m$–invariant ist, ist $\mathrm{grad}E(c^m)$ tangential an die Fixpunktmenge $DN'(c^m)_m$ und somit gilt

$$\mathrm{grad}E(c^m) = \phi^m_*(\mathrm{grad}E(c))\,.$$

Von entscheidender Bedeutung ist nun, daß

$$\phi_*^m \left(T_c^0 \Lambda\right) \subset T_{c^m}^0 \Lambda \,.$$

Wenn nämlich $J \in T_c^0$, d.h. J ist ein periodisches Jacobifeld längs c, dann ist $\phi_*^m J(t) = J(mt)$ ein periodisches Jacobifeld längs c^m. Wenn wir also voraussetzen, daß $\mathrm{null}(c) = \mathrm{null}(c^m)$, so gilt $\phi_*^m T_c^0 \Lambda = T_{c^m}^0 \Lambda$. Nach der Konstruktion der charakteristischen Mannigfaltigkeiten ist $\phi^m(W(c))$ dann eine charakteristische Mannigfaltigkeit für c^m, wenn $W(c)$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit für c ist. Wenn also $\mathrm{null}(c) = \mathrm{null}(c^m)$, dann gilt

$$\begin{aligned} &H_* \left((W(c) \cap \Lambda(c)) \cup \{c\} \,, W(c) \cap \Lambda(c) \right)^{\pm 1} \cong \\ &H_* \left((W(c^m) \cap \Lambda(c^m)) \cup \{c^m\} \,, W(c^m) \cap \Lambda(c^m) \right)^{\pm 1} \end{aligned} \tag{12}$$

Außerdem benötigen wir das folgende

Lemma 7.1 *Sei c eine isolierte geschlossene Geodätische.*
a) [GM2, lemma 2] *Es gibt positive Zahlen $k_1, \ldots, k_s$ und Folgen $m_j^i \in \mathbb{Z}^+$ mit $i > 0, j = 1, \ldots, s$, so daß $m_j^1 = 1, \{m_j^i k_j \,|\, i > 0, j = 1, \ldots, s\} = \mathbb{Z}^+$ und $m_j^i k_j = m_{j'}^{i'} k_{j'}$ genau dann, wenn $i = i', j = j'$ und es gilt*

$$\mathrm{null}(c^{m_j^i k_j}) = \mathrm{null}(c^{k_j}) \,.$$

b) Es gibt eine gerade Zahl $k(c) > 0$, so daß $\mathrm{null}(c^{m+k(c)}) = \mathrm{null}(c^m)$ *für alle $m \geq 1$.*

Beweis. a) Seien $\exp(\pm 2\pi i \lambda_1), \ldots, \exp(\pm 2\pi i \lambda_k), \lambda_j \in [0, 1/2]$ die Eigenwerte mit Norm 1 der linearisierten Poincaré–Abbildung P_c von c. Diese Zahlen nennen wir die Poincaré–Exponenten von c. Wenn alle λ_j irrational sind, so sind nach Theorem 4.1 alle Iterierten c^m nicht–degeneriert. Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die rationalen Poincaré–Exponenten, wir schreiben sie in der Form $\lambda_j = p_j/q_j$ mit $\mathrm{ggT}(p_j, q_j) = 1$. Sei $Q := \{q_j \,|\, j = 1, \ldots, r\}$. Für eine nicht–leere Teilmenge $A \subset Q$ sei $k(A) := \mathrm{kgV}\{q_j \,|\, j = 1, \ldots, r\,; q_j \in A\}$. Dann seien $k_1, \ldots, k_s$ paarweise verschiedene natürliche Zahlen, so daß $\{k_1, \ldots, k_s\} = \{k(A) \,|\, A \subset Q\} \cup \{1\}$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, s\}$ definieren wir induktiv $m_j^1 = 1$,

$$m_j^{i+1} = \min\{m > m_j^i \,|\, q \not| mk_j \text{ für alle } q \in Q \text{ mit } q \not| k_j\}$$

Dann erfüllen diese Folgen nach Theorem 4.1 die Behauptung a).

b) Sei $\tilde{q} := \mathrm{kgV}\{q_1, \ldots, q_r\}$, $\tilde{k} := \mathrm{kgV}\{k_1, \ldots, k_s\}$, $k(c) := 2\tilde{q}\tilde{k}$. Wenn $m = m_j^i k_j$, dann gilt also für $q \in Q_j := \{q \in Q | q \not| k_j\}$: $q \not| m$. Da $m + k(c) = (m_j^i + 2A\tilde{q})k_j$ für eine natürliche Zahl A und da $q \not| m + k(c)$, gibt es also ein $i' > i$, so daß $m + k(c) = m_j^{i'} k_j$, d.h. $\mathrm{null}(c^m) = \mathrm{null}(c^{m+k(c)})$.

Lemma 7.2 *Wenn c eine isolierte geschlossene Geodätische ist, dann gibt es eine gerade Zahl $k(c) > 0$, so daß für alle $m \geq 1$, $j \geq 0$:*

$$M_{m,j+\mathrm{ind}(c^m)}(c) = M_{m+k(c),j+\mathrm{ind}(c^{m+k(c)})}(c)\,.$$

Beweis. Sei$k(c)$ die positive gerade Zahl aus dem vorherigen Lemma. Sei $j \in \{1, \ldots, s\}$ die Zahl, so daß $m = m_j^i k_j$. Wenn nun

$$W^-(k_j) := W(c^{k_j}) \cap \Lambda(c^{k_j}) \quad , \quad W(k_j) := W^-(k_j) \cup \{c^{k_j}\}$$

und $\phi^r : \Lambda \to \Lambda, \phi^r(\tilde{c}) = \tilde{c}^r$, dann setzen wir

$$W^-(rk_j) := \phi^r(W^-(k_j)) \quad , \quad W(rk_j) := \phi^r(W(k_j))\,.$$

Für $r = m_j^l$, $l > 0$ ist also $W(c^{rk_j}) = \phi^r(W(c^{k_j}))$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit zu c^{rk_j} nach Lemma 7.1.
$\eta(rk_j) := \eta(c^{rk_j}) \in \{\pm 1\}$ wurde in Satz 6.11 definiert. Es gilt $\eta(rk_j) = 1$ genau dann, wenn $rk_j \equiv 1 \pmod 2$ oder $|\gamma_c| = 1$. Nach Satz 6.11 gilt dann

$$\overline{C}_{*-\mathrm{ind}(c^{rk_j})}(c^{rk_j}) \cong H_*\Big(W(rk_j)\,,\, W^-(rk_j)\Big)^{\eta(rk_j)}\,.$$

ϕ^r induziert einen Isomorphismus

$$\phi_*^r : H_*\Big(W(k_j)\,,\, W^-(k_j)\Big) \longrightarrow H_*\Big(W(rk_j)\,,\, W^-(rk_j)\Big)\ .$$

Sei T_r Erzeugendes der $\mathbb{Z}_{rk_j}$–Aktion auf $W(rk_j)$. Dann gilt

$$\phi^r \circ T_1 = T_r \circ \phi^r\ ,$$

also

$$H_*\Big(W(rk_j)\,,\, W^-(rk_j)\Big)^{\eta(rk_j)} \cong H_*\Big(W(k_j)\,,\, W^-(k_j)\Big)^{\eta(rk_j)}\ .$$

Da $m = m_j^i k_j$ und $m + k(c) = (m_j^i + 2\tilde{q}A)k_j$ für eine natürliche Zahl A, so gilt $\eta(m) = \eta(m + k(c)) = \eta$, d.h.

$$\begin{aligned} H_*\Big(W(m)\,,\, W^-(m)\Big)^{\eta} &\cong H_*\Big(W(m+k(c))\,,\, W^-(m+k(c))\Big)^{\eta} \\ &\cong H_*\Big(W(k_j)\,,\, W^-(k_j)\Big)^{\eta} \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir den Beitrag der Iterierten einer primen geschlossenen Geodätischen c mit Länge $L(c)$ zum Morse–Polynom abschätzen. Dazu sei für $j \geq 0, m \geq 1, L > 0$:

$$\begin{aligned} M_{m,j}(c) &:= \dim \overline{C}_j(c^m) \\ M_j^L(c) &:= \sum_{m=1}^{[L/L(c)]} M_{m,j}(c) \\ M^L(c)[t] &:= \sum_{j=0}^{\infty} M_j^L(c)\, t^j \\ M^{L,N}(c)[t] &:= \sum_{j=0}^{N} M_j^L(c)\, t^j \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $M_{m,j}(c)$ sind nach Satz 6.13 endlich.

Wenn für alle $m \geq 1$ die Iterierten c^m nicht–degeneriert sind, dann gilt nach Korollar 6.12

$$M_{m,j}(c) = \begin{cases} 1 & ; j = \mathrm{ind}(c^m) \text{ und} \\ & \quad m \equiv 1 \pmod 2 \text{ oder } |\gamma_c| = 1 \\ & \\ 0 & ;\ \text{sonst} \end{cases} .$$

In diesem Fall ist $k(c) = 2$. Für $|\gamma_c| = 1$ gilt

$$M^{mL(c)}(c)[t] = \sum_{l=1}^{m} t^{\mathrm{ind}(c^l)}$$

also $M^{mL(c)}[-1] = \gamma_c m$. Für $|\gamma_c| = 1/2$ gilt

$$M^{mL(c)}(c)[t] = \sum_{l=1}^{[m/2]} t^{\mathrm{ind}(c^{2l-1})}$$

also $M^{mL(c)}[-1] = (\gamma_c/|\gamma_c|)[m/2]$. Wenn c hyperbolisch ist, d.h. $\mathrm{ind}(c^m) = m \cdot \mathrm{ind}(c) = m \cdot \alpha_c$, dann gilt

$$M^{mL(c)}(c)[t] = \sum_{l=1}^{m} t^{l\alpha_c} \,,$$

falls α_c gerade ist (dann ist $\gamma_c = 1$) und

$$M^{mL(c)}[t] = \sum_{l=1}^{[m/2]} t^{(2l-1)\alpha_c} \,,$$

falls α_c ungerade ist (dann ist $\gamma_c = -1/2$).

Satz 7.3 *Sei c eine isolierte prime geschlossene Geodätische mit positivem mittleren Index α_c. Sei $k(c) > 0$ die Zahl aus Lemma 7.2 und $L(c)$ die Länge von c. Sei*

$$\beta_c := \frac{1}{k(c)} M^{k(c)L(c)}(c)[-1] = \frac{1}{k(c)} \sum_{1 \le m \le k(c)\,;\, j \ge 0} (-1)^j M_{m,j}(c)$$

Dann gilt

a) Für alle $N \geq n-1$ und für alle $L > 2NL(c)/\alpha_c$:

$$M_N^L(c) = M_N^\infty(c) \,.$$

b) Es gibt eine Zahl $A_1 > 0$, so daß für alle $j \geq 0$:

$$M_j^\infty(c) \le A_1 \,.$$

c) Es gibt eine Zahl $A_c > 0$*, so daß für alle* $N \geq 1$*:*

$$\left| M^{\infty,N}(c)[-1] - \frac{N}{\alpha_c}\beta_c \right| \leq A_c \, .$$

d) Wenn $\mathrm{null}(c^m) = 0$ *für alle* $m \geq 1$ *gilt, dann ist*

$$\beta_c = \gamma_c \in \{\pm\frac{1}{2}\, , \, \pm 1\} \, ,$$

wobei γ_c *die in Definition 6.8 eingeführte Invariante ist.*

e) Wenn c *eine hyperbolische geschlossene Geodätische ist mit* $\mathrm{ind}(c) = \alpha_c \in \mathbb{N}$*, dann ist für alle* $l \geq 1$*:*

$$M^{\infty,2l\alpha_c}(c)[-1] = 2l\gamma_c$$

Dabei ist $\gamma_c = 1$*, falls* α_c *gerade ist, und* $\gamma_c = -1/2$*, falls* α_c *ungerade ist.*

Beweis. a) Aus der Ungleichung (vgl. Theorem 4.6)

$$|\mathrm{ind}(c^m) - m\alpha_c| \leq n - 1 \tag{13}$$

folgt, daß $\mathrm{ind}(c^m) > N$, falls $m > (N + n - 1)/\alpha_c$. Also ist nach Satz 6.13 $M_{m,N}(c) = 0$ für alle $m > (N + n - 1)/\alpha_c$, sowie $M_N^{mL(c)}(c) = M_N^L = M_N^\infty$ für alle $L > mL(c)$.

b) Setze $B_m := \max_j M_{m,j}(c)$. Nach Lemma 7.2 gilt $B_{m+k(c)} = B_m$ für alle $j \geq 0\, ,\, m \geq 1$. Nach Gleichung (13) gilt $\mathrm{ind}(c^m) + \mathrm{null}(c^m) < N$ für $m < (N - 3n - 3)/\alpha_c$, also ist für festes $j \geq 0$:

$$\#\{m \geq 1 \,|\, M_{m,j}(c) > 0\} \leq \frac{2n - 2}{\alpha_c} + 1 \, .$$

Demnach gilt mit $B := \max\{B_m | 1 \leq m \leq k(c)\}$:

$$M_j^\infty(c) = \sum_{m=1}^{\infty} M_{m,j}(c) \leq \left(\frac{2n - 2}{\alpha_c} + 1\right) \cdot B =: A_1 \, .$$

c) Da $k(c)$ gerade ist und für $m \geq 1$ nach Lemma 7.2

$$M^{mk(c)L(c)}(c)[t] = M^{k(c)L(c)}(c)[t] \sum_{j=1}^{m} t^{\mathrm{ind}(c^{jk(c)})}$$

gilt:

$$M^{mk(c)L(c)}(c)[-1] = mM^{k(c)L(c)}(c)[-1] \,.$$

Also gilt mit der Abkürzung $\tilde{M} := M^{k(c)L(c)}(c)[1]$:

$$\begin{aligned} & \left| M^{\infty,N}(c)[-1] - \frac{N}{\alpha_c}\beta_c \right| \\ = & \left| \sum_{j\leq N\,;\,m\geq 1} (-1)^j M_{m,j}(c) - \frac{N}{\alpha_c k(c)} \sum_{j\geq 1\,;\,m\leq k(c)} (-1)^j M_{m,j}(c) \right| \\ \leq & \left| \sum_{j\leq N\,;\,m\geq 1} (-1)^j M_{m,j}(c) - \sum_{j\geq 1, m\leq [N/(\alpha_c k(c))]k(c)} (-1)^j M_{m,j}(c) \right| + \tilde{M} \\ \leq & \left| \sum_{j\leq N\,;\,m> [N/(\alpha_c k(c))]k(c)} (-1)^j M_{m,j}(c) \right| + \tilde{M} \qquad (14) \end{aligned}$$

Aus $j \leq N\,;\, m > [N/(\alpha_c k(c))]k(c)$ und $M_{m,j}(c) > 0$ folgt $\mathrm{ind}(c^m) \leq N$ und somit $m \leq \frac{N}{\alpha_c} + \frac{n-1}{\alpha_c}$ sowie $N - k(c)\alpha_c - (n-1) \leq \mathrm{ind}(c^m) \leq j$. Also ist

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j\leq N\,;\,m>[N/(\alpha_c k(c))]k(c)} (-1)^j M_{m,j}(c)\right| \leq \\
\leq\ & \#\Big\{(j,m)\in \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\ |N-k(c)\alpha_c-(n-1)\leq j\leq N\,, \\
& \frac{N}{\alpha_c}-k(c)<m\leq\frac{N}{\alpha_c}+\frac{n-1}{\alpha_c}\Big\}\cdot B \\
\leq\ & (k(c)\alpha_c+n)\left(k(c)+\frac{n-1}{\alpha_c}+1\right)\cdot B \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Also ist nach den Gleichungen (14) und (15) die Folge

$$\left(\left|M^{\infty,N}(c)[-1]-\frac{N}{\alpha_c}\beta_c\right|\right)_{N\geq 1}$$

beschränkt.

7.2 Geschlossene Geodätische mit verschwindendem mittleren Index

Für geschlossene Geodätische c mit mittlerem Index $\alpha_c=0$ gilt nach Korollar 4.4 $\mathrm{ind}(c^m)=0$ für alle $m\geq 1$. Eine solche Geodätische produziert also lokale Homolgie in Dimensionen $\leq 2n-2$.

Die Iterationsabbildung $\phi^m:\Lambda\to\Lambda, \tilde c\mapsto\tilde c^m$ induziert den Homomorphismus (c ist nicht notwendig prim)

$$\phi^m_*: C_*(c;\mathbb{Z})\to C_*(c^m;\mathbb{Z})$$

zwischen den kritischen Gruppen. Wenn $\alpha_c>0$, dann ist ϕ^m_* trivial für fast alle $m\geq 1$, da der Index $\mathrm{ind}(c^m)$ linear wächst.

Seien $K:=\{k_1,\ldots,k_s\}$ die Zahlen aus Lemma 7.1. Für diese Zahlen gibt es also Folgen $m^i_1,\ldots,m^i_s$, so daß $\mathrm{null}(c^{k_j})=\mathrm{null}(c^{m^j_i k_j})$. Sei $K':=\{k'_1,\ldots,k'_r\}=\{k_1,\ldots,k_r\}-\{1\}$. Dann gilt also für jede Zahl $m\in\mathbb{N}$, die nicht Vielfaches einer Zahl $k'\in K'$ ist, daß $\mathrm{null}(c^m)=\mathrm{null}(c)$. Somit ist für jedes solche m die Abbildung ϕ^m_* ein Isomorphismus, wenn $\alpha_c=0$.

Mit Hilfe einer von Bangert in [Ba1] eingeführten globalen Homotopie konnten dann Bangert–Klingenberg zeigen, daß diese durch Iteration gewonnene relative Homologie $C_*(c^m)$ für unendlich viele m in $H_*(\Lambda\,,\,\Lambda(c^m))$ unter einer zusätzlichen Voraussetzung an c trivial ist. Es gilt der

Satz 7.4 [BaKl, cor.1] *Sei c eine geschlossene Geodätische, die kein absolutes Minimum für E in ihrer freien Homotopieklasse ist. Für jede endliche Menge J natürlicher Zahlen ≥ 2 gibt es eine natürliche Zahl m, die keine der Zahlen $j \in J$ als Teiler besitzt, so daß die Komposition*

$$C_*(c;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi_*^m} C_*(c^m;\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_*(\Lambda\,,\,\Lambda(c^m);\mathbb{Z})$$

trivial ist. Dabei wird i_* von der Inklusion induziert.

Die zusätzliche Voraussetzung an c ist notwendig. Wenn z.B. M eine kompakte Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung ist, dann gibt es in jeder freien Homotopieklasse genau eine geschlossene Geodätische, die dann ein absolutes Minimum für E ist. In diesem Fall hat jede Komponente von ΛM den Homotopietyp von S^1, also ist die Komposition $i_*\phi_*^m$ ein Isomorphismus für alle m.

Die von Bangert eingeführte Homotopie benutzt nicht die Symmetrie der zugrunde gelegten Riemannschen Metrik, deshalb lassen sich diese Resultate auch auf den Fall von (nicht–symmetrischen) Finsler–Metriken übertragen.

Eine geschlossene Geodätische heißt *homologisch unsichtbar* , falls $C_*(c^m;\mathbb{Z}) = 0$ für alle $m \geq 1$. Nach Lemma 7.1 ist dies äquivalent zur Annahme $C_*(c^m;\mathbb{Z}) = 0$ für alle $m \in \{1,2,\ldots,k(c)\}$. Insbesondere ist eine homologisch unsichtbare geschlossene Geodätische degeneriert. Nach Satz 6.6 verschwinden dann auch alle S^1–kritischen Gruppen $\overline{C}_*(c^m;\mathbb{Q})$ für alle $m \geq 1$. Dann kann man mit Hilfe des vorigen Satzes zeigen:

Theorem 7.5 (vgl. [BaKl, thm.3]) *Wenn M eine kompakte einfach–zusammenhängende Finsler–Mannigfaltigkeit mit nur endlich vielen geometrisch* *verschiedenen geschlossenen Geodätischen ist, dann ist jede der geschlossenen Geodätischen mit verschwindendem mittleren Index homologisch unsichtbar.*

Zum Beweis wählt man einen Körper K ($K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_{p'}, p' \in \mathbb{P}$) und eine geschlossene Geodätische c mit $\alpha_c = 0$, für die es ein $p \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$C_p(c; K) \neq 0$$

und so daß für alle anderen geschlossenen Geodätischen d mit $\alpha_d = 0$ und für alle $q > p$:

$$C_q(d; K) = 0\,.$$

Für c gibt es Zahlen $\{k'_1, \ldots, k'_r\}$ mit $k'_i \geq 2$, so daß

$$\phi^m_* : C_*(c; K) \to C_*(c^m; K)$$

ein Isomorphismus ist, wenn m von keinem $k' \in K'$ geteilt wird. Da es nur endlich viele geschlossene Geodätische gibt, gibt es eine Zahl $A > 0$, so daß für alle geschlossenen Geodätischen d mit $\alpha_d > 0$ gilt: Wenn $E(d) > A$, dann ist $\operatorname{ind}(d) \geq p + 2$, d.h. $C_j(d; \mathbb{Z}) = 0$ für $j \leq p + 1$. Wir werden aus den Morse–Ungleichungen folgern, daß

$$i_* \phi^m_* : C_*(c; K) \to H_*(\Lambda\,,\, \Lambda(c^m))$$

injektiv ist, falls $E(c^m) > A$ und falls m von keiner der Zahlen $k' \in K'$ geteilt wird. Dies widerspricht dann dem vorherigen Satz. Wir zeigen die Injektivität der Abbildung

$$i_* : C_*(c^m; K) \to H_*(\Lambda\,,\, \Lambda(c^m))$$

für alle m mit $E(c^m) > A$. Wir wenden die Morse Ungleichungen 6.1 auf $(\Lambda^L\,,\, \Lambda^A)$ für $L > A$ an. Da es nach Voraussetzung keine geschlossenen Geodätischen d gibt mit $E(d) > A$ und $C_{p+1}(d; K) \neq 0$, gilt

$$M_{p+1}(\Lambda^L\,,\, \Lambda^A) = 0\,.$$

Also ist $b_{p+1}(\Lambda^L, \Lambda^A) = 0$, woraus auch $b_{p+1}(\Lambda, \Lambda^A) = 0$ folgt. Aus der exakten langen Homologiesequenz des Tripels $(\Lambda, \Lambda(c^m) \cup S^1.c, \Lambda(c^m))$ folgt dann die Injektivität von i_*.

7.3 Der Zusammenhang zwischen den mittleren Indices bei Metriken mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen

Die folgende Verallgemeinerung des entsprechenden Resultats von Gromoll und Meyer für Riemannsche Mannigfaltigkeiten wurde für Finsler–Metriken von Matthias gezeigt.

Theorem 7.6 ([GM2, thm. 4], [Ma2]) *Wenn M eine kompakte Finsler–Mannigfaltigkeit mit nur endlich vielen (geometrisch verschiedenen) homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen ist, dann ist die Folge $b_i(\Lambda; K)$ der Betti–Zahlen des freien Schleifenraums mit $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}_p, p \in \mathbb{P}$ beschränkt.*

Dieses Ergebnis ist in den Resultaten des Kapitels 6 enthalten, wenn anstelle der S^1–kritischen Gruppen die kritischen Gruppen betrachtet werden. So folgt also auch, daß die Folge $b_i(\bar{\Lambda};\mathbb{Q})$ beschränkt ist. Dagegen wird i.a. die Folge $b_i(\bar{\Lambda}; \mathbb{Z}_p)$ für eine Primzahl p unbeschränkt sein, vgl. [Ra2, 4.11], wo gezeigt wird, daß die Homologie $H_s(\bar{\Lambda}S^2, \bar{\Lambda}^0 S^2; \mathbb{Z})$ für alle ungeraden $s \geq 3$ nicht endlich erzeugt ist.

Mit Hilfe rationaler Homotopietheorie konnten Vigué–Poirrier/Sullivan zeigen:

Theorem 7.7 [VS] *Wenn M eine kompakte einfach–zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, für die die Folge $b_i(\Lambda M;\mathbb{Q})$ der rationalen Betti–Zahlen des freien Schleifenraums beschränkt ist, dann hat die rationale Kohomologie Algebra $H^*(M;\mathbb{Q})$ genau ein Erzeugendes.*

Es gibt also Zahlen $d, m \in \mathbb{N}$, die den rationalen Homotopietyp von M bestimmen, so daß $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong T_{d,m+1}(x) := \mathbb{Q}[x]/(x^{m+1} = 0)$, d.h. $H^*(M;\mathbb{Q})$ wird von einem Element x von Grad d erzeugt und es gilt $x^{m+1} = 0$, d.h. $\dim M = md$. Wenn d ungerade ist, so gilt wegen $x^2 = (-1)^d x^2 = -x^2$ also $m = 1$, d.h. M ist rational homotopieäquivalent zu einer d–Sphäre.

Mit Hilfe rationaler Homotopietheorie erhält man den

Satz 7.8 [Ra1, 2.6] *Für eine kompakte einfach–zusammenhängende Mannigfaltigkeit M mit $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong T_{d,m}(x)$ gilt:*

a) Wenn

$$B(d,m) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b_i(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0;\mathbb{Q})$$

so gilt

$$B(d,m) = \begin{cases} -\frac{m(m+1)d}{2d(m+1)-4} & ; d \equiv 0 \pmod 2 \\ \\ \frac{d+1}{2d-2} & ; d \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

b) Wenn d gerade ist, so gilt für $b := d(m+1) - 2$:

$$\sum_{i=0}^{bj} (-1)^i b_i(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0;\mathbb{Q}) = bjB(d,m) + \frac{1}{4} m(m+1)d$$

Damit können wir folgendes Ergebnis zeigen, daß für den Fall holpriger Metriken in [Ra1, thm.3] gezeigt wurde:

Theorem 7.9 *M sei eine kompakte einfach–zusammenhängende Finsler–Mannigfaltigkeit mit nur endlich vielen (geometrisch verschiedenen) primen geschlossenen Geodätischen $c_1, \ldots, c_r$. Dann gilt also $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong T_{d,m}(x)$ nach Theorem 7.6 und Theorem 7.7: nach Theorem 7.5 sind die mittleren Indizes $\alpha_i = \alpha_{c_i}$ positiv für alle $i = 1, \ldots, r$.*

a) Wenn dann $B(d,m)$ die Invariante aus Satz 7.8 des rationalen Homotopietyps von M ist und $\beta_i = \beta_{c_i} \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, r$ die metrischen Invarianten *der geschlossenen Geodätischen aus Satz 7.3 sind, dann gilt*

$$B(d,m) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

b) Für gerades d ist eine der geschlossenen Geodätischen nicht–hyperbolisch.

Beweis. Da $\alpha_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$, gibt es nach Satz 7.3 b) eine Zahl $A_1 > 0$, so daß für alle $j \geq 0$

$$M_j^{\infty}(c_i) \leq \frac{A_1}{r}\,.$$

Also sind die Vorausetzungen für die Anwendung der Morse–Ungleichungen Theorem 6.1 für $(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0)$ erfüllt, d.h. die Koeffizienten M_j der Morse–Reihe

$$M(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0)[t] = \sum_{i=1}^{r} M^{\infty}(c_i)[t] = \sum_{j=0}^{\infty} M_j t^j$$

sind beschränkt durch A_1. Sei $b_j := b_j(\bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}^0; \mathbb{Q})$. Die Morse–Ungleichungen besagen also, daß es eine Folge (q_j) nicht–negativer ganzer Zahlen gibt, so daß

$$M_j = b_j + q_j + q_{j-1}$$

für alle $j \geq 0$. Da $M_j \leq A_1$ für alle $j \geq 0$, gilt also auch $q_j \leq A_1$ für alle $j \geq 0$. Nach Satz 7.3 c) gibt es eine Zahl $A > 0$, so daß für alle $i = 1, \ldots, r$:

$$\left| M^{\infty,N}(c_i)[-1] - \frac{N}{\alpha_i}\beta_i \right| \leq \frac{A}{r}\,. \tag{16}$$

Nach den Morse–Ungleichungen gilt für gerades $N > 0$:

$$\begin{aligned} q_N &= \sum_{j=0}^{N} (-1)^j M_j - \sum_{j=0}^{N} (-1)^j b_j \\ &= \sum_{i=1}^{r} M^{\infty,N}(c_i)[-1] - \sum_{j=0}^{N} (-1)^j b_j \end{aligned} \tag{17}$$

Da $q_N \leq A_1$ für alle $N \geq 0$, folgt also aus den Gleichungen (16) und (17), daß für alle $N \geq 0$:

$$\left| N \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \sum_{j=0}^{N} (-1)^j b_j \right| \leq A + A_1 \, ,$$

also

$$B(d,m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} (-1)^j b_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \, .$$

b) Sei $b := d(m+1) - 2$ und seien alle geschlossenen Geodätischen $c_1, \ldots, c_r$ hyperbolisch. Dann setzen wir $\alpha := \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r = \mathrm{ind}(c_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{ind}(c_r)$. Dann gilt nach Satz 7.8 b) und Teil a) dieses Beweises:

$$\begin{aligned} q_{bn\alpha} &= \sum_{j=0}^{bN\alpha} (-1)^j M_j - \sum_{j=0}^{bN\alpha} (-1)^j b_j \\ &= bN\alpha \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} - B(d,m) \right) - \frac{1}{4} m(m+1)d \\ &= -\frac{1}{4} m(m+1)d < 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $q_{bN\alpha} \geq 0$ □

Bemerkung 7.10 In [Ra1] nennen wir eine Metrik *zulässig*, falls die Menge der geschlossenen Geodätischen als Teilmenge von ΛM die disjunkte Vereinigung von nicht–degenerierten kritischen Untermannigfaltigkeiten $B_k^m, m \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, r$ mit $B_k^m = \{c^m | c \in B_k\}$ ist (vgl. Abschnitt 2.1), und falls die Quotientenräume B_k/S^1 einfach–zusammenhängend sind. Eine holprige Metrik mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen ist insbesondere zulässig. Die kompakten einfach–zusammenhängenden symmetrischen Räume vom Rang 1 sind weitere Beispiele zulässiger Metriken, in diesem Fall gilt $r = 1$ und die Mannigfaltigkeit B_1 der primen geschlossenen Geodätischen kann mit dem Einheitstangentialbündel identifiziert werden. Für eine zulässige Metrik setzen wir für $k = 1, \ldots, r\ : \alpha_k := \alpha_c, \gamma_k := \gamma_c$ für ein

$c \in B_k$. χ_k sei die Euler–Charakteristik des Quotienten B_k/S^1. Dann erhalten wir in [Ra1, thm.3]:

$$B(d,m) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \chi_k \,.$$

Diese Formel kann man benutzen, um für die kompakten einfach–zusammenhängenden symmetrischen Räume vom Rang 1 die topologische Invariante $B(d,m)$ auszurechnen.

Beispiel 7.11 Sei $F_\mu, \mu \in (0,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ die Familie nicht–symmetrischer holpriger Finsler–Metriken auf S^2 nach Katok, deren Konstruktion wir im Abschnitt 5.3 angegeben haben. F_μ besitzt zwei geschlossene Geodätische $c_\pm$ mit mittlerem Index $\alpha_\pm = 2/(1 \pm \mu)$ und $\gamma_\pm = -1$. Also gilt

$$B(2,1) = \frac{-1}{\alpha_+} + \frac{-1}{\alpha_-} = -1$$

in Übereinstimmung mit Satz 7.8a).

Da nach Gleichung (8) der mittlere Index einer nicht–hyperbolischen geschlossenen Geodätischen auf einer Fläche mit einer holprigen Metrik irrational ist, folgt aus Theorem 7.9: Jede holprige Finsler–Metrikauf S^2 mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen hat mindestens zwei nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische.

Mit Hilfe der S^1–äquivarianten Kohomologie des Raums ΛM zeigt Hingston das folgende Resultat für Riemannsche Metriken. Da die $\mathbb{Z}_2$–Symmetrie θ des Raumes ΛM nicht verwendet wird, überträgt sich das Resultat auf Finsler–Metriken.

Theorem 7.12 [Hi1, (6.2)] *Wenn auf einer kompakten einfach–zusammenhängenden Finsler–Mannigfaltigkeit M vom rationalen Homotopietyp eines kompakten symmetrischen Raums vom Rang 1 alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, dann gibt es unendlich viele.*

Wenn $n(l)$ die Anzahl der geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen der Länge $< l$ ist, dann gilt

$$\liminf_{l \to \infty} n(l) \frac{\log(l)}{l} > 0 \, .$$

Sullivan zeigt in [Su], daß es neben den rationalen Homotopietypen der symmetrischen Räume vom Rang 1 (für die d ungerade ist oder $d \in \{2, 4, 8\}$) unendlich viele rationale Homotopietypen von einfach–zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten M mit $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong T_{d,m+1}(x)$ gibt (dann ist also insbesondere d gerade). Das Theorem 7.12 von Hingston und Theorem 7.9 zusammen ergeben also das folgende

Theorem 7.13 *Wenn M eine kompakte einfach–zusammenhängende Finsler–Mannigfaltigkeit ist, für die alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, dann gibt es unendlich viele (geometrisch verschiedene) geschlossene Geodätische.*

Bemerkung 7.14 a) Wenn f eine Isometrie endlicher Ordnung k einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist, dann heißt eine Geodätische *f–invariant*, falls $f(c(t)) = c(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist also $c|[0,k]$ eine geschlossene Geodätische, die invariant ist unter f. f–invariante Geodätische lassen sich als kritische Punkte des Energiefunktionals auf dem Raum $\Lambda(M, f)$ der f–invarianten Kurven charakterisieren. Diese Theorie wurde von Grove eingeführt [Gr]. In [GT] zeigen Grove–Tanaka eine Verallgemeinerung des Theorems 7.6 für geschlossene Geodätische von Gromoll–Meyer auf den Fall isometrie–invarianter Geodätischer. Sinngemäß lassen sich unter gewissen topologischen Voraussetzungen an f bzw. die Fixpunktmenge von f die Ergebnisse dieses Kapitels auf den Fall f–invarianter Geodätischer übertragen, vgl. [Hi3], [Ra3]. Während es kein Beispiel einer Riemannschen Metrik mit nur endlich vielen geschlossenen Geodätischen gibt, so kann man leicht mit Hilfe von Rotationen auf Standardsphären Beispiele konstruieren mit nur endlich vielen isometrie–invarianten Geodätischen, vgl. [Ra3, §4].

b) In Kapitel 8 werden wir zeigen, daß es Riemannsche Metriken auf S^2 gibt, für die alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, d.h. die Voraussetzungen von Theorem 7.12 bzw. Theorem 7.13 sind erfüllt. Außerdem gibt es Metriken auf S^2 mit einer Isometrie endlicher Ordnung, so daß alle isometrie–invarianten Geodätischen hyperbolisch sind.

8 Metriken auf S^2 mit vielen hyperbolischen geschlossenen Geodätischen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass es auf der 2-dimensionalen Sphäre C^∞- Metriken gibt, für die alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, Es ist eine offene Frage, ob es Riemannsche Metriken auf einer einfach-zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit gibt, für die alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. In den Existenzsätzen für geschlossene Geodätische für solche Metriken, die morsetheoretische Argumente benutzen, kann die Voraussetzung abgeschwächt werden zu der Annahme, dass alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, do z.B. in Theorem 7.13. Außerdem zeigen wir, dass es möglich ist, zu gegebenem $L > 0$ diese Metrik so zu stören, dass alle geschlossenen Geodätischen der Länge $< L$ hyperbolisch sind.

Donnay gibt in [Do1 [Do2] C^∞]-Metriken auf S^2 an, deren geodätischer Fluß positive maßtheoretische Entropie hat und ergodisch ist. Burs-Gerber zeigen in [BG], dass man durch Störung dieser Metriken mit ergodischem geodätischen Fluß erhält.
Ausgangspunkt dieser Beispiele ist das folgende Beispiel von Ossermann. Sei M_1 eine Fläche mit Rand mit konstanter Gaußscher Krümmung $K \equiv -1$, die diffeomarph ist zu einer 2-Späre, aus der 3 Punkte entfernt werden und deren Randkurven einfache geschlossene Geodätische sind (auch $Y - Stück$ oder $Hose$ genannt). Auf diese Ränder setzt man drei Hemisphären $C_i, i = 1, 2, 3$ konstanter positiver Krümmung auf, das dass man eine Metrik auf $M_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ erhält, die C^1 ist. In diesem Beispiel kann man leicht einsehen, dass der geodätische Fluß ergodisch ist (vgl. den Anhang [Do1, A.3]).

Für $L > 0$ sei $D_L^2 := (x, y)\varepsilon \mid x^2 + y^2 \leq L^2$ die Scheibe mit Radius L und seien $(r, \phi), \varepsilon(o, L), \phi\varepsilon[0, 2\pi)$ Polarkoordinaten Für D_L^2. Wir nennen die

Scheibe D_L^2 zusammen mit einer rotationssymmetrischen Metrik der Form.

$$dr^2 + g^2(r)d\phi^2$$

für eine ungerade C^∞-Funktion $g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *Kappe mit monotoner Krümmung,* falls gilt:

a) Die Gaußsche Krümmung $K : [0, L] \to, K(r) = -g''(r)/g(r)$ ist monoton fallend und $K(L) = 0$.

b) Der Rand $r = L$ der Kappe ist eine Geodätische (d. h. $g(L) = 0$).

Wir werden später Metriken auf S^2 untersuchen, für die die Menge $M^+ := \{p \in M | K(p) \geq 0\}$ aus disjunkten Kappen monotoner Krümmung bestehen. Zunächst untersuchen wir vom morsetheoretischen Standpunkt aus die Randgeodätischen, an denen die Gaußsche Krümmung ihr Vorzeichen wechselt:

Lemma 8.1 *Auf einer orientierbaren kompakten Fläche sei eine geschlossene Geodätische c mit einer Tubenumgebung $S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ gegeben, wobei $c(t) = (t, 0)$ so dass für die Gaußsche Krümmung $K(u, v), (u, v) \in S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Bedingung $K(u, v) \cdot v > 0$ für alle $v \neq 0$ erfüllt ist. Dann sind alle Iterierten c^m von c* homolgisch unsichtbar.

Beweis. Da $K(t, 0) = 0$ für alle t, besitzt $c^m(t) = (mt, 0), t \in [0, 1]$ keine konjugierten Punkte. Die Hessesche $d^2E(c^m)$ des Energiefunktionals ist positiv semi-definit. Wir fixieren m und $a > E(c^m)$ und wählen $k \in \mathbb{N}$, so dass $1/k < \eta^2/(2a)$, wobei $\eta > 0$ der Konvexiätsradius von M ist. Die in Abschnitt 6.2 definierte endlich-dimensionale Approximation $\Lambda(k, a)$ hat dann eine Metrik d, die von der Produktmetrik auf $M \times \cdots \times M$ induziert wird.

Da $\text{null}(c^m) = 1$, ist die charakteristische Mannigfaltigkeit W von c^m ein-dimensional (vgl. Theorem 6.3). Wir nehmen an, dass c^m homologisch sichtbar ist. Da $\text{ind}(c^m) = 0$, ist c nach Satz 6.13 ein lokales Minimum von E oder ein lokales Maximum von der Einschränkung $E \mid W$. Für eine genügend kleine Umgebung U von c in $\Lambda(k, a)$ und für die Menge $\Lambda(c^m) = \{\sigma \in$

$\Lambda(k,a)|E(\sigma) < E(c^m)\}$ ist dann also $U \cap \Lambda(c^m)$ entweder leer oder nicht-zusammenhängend.

Wir werden nun zeigen, dass $U \cap \Lambda(c^m)$ nicht-leer und zusammenhängend ist: Da c^m keine konjugierten Punkte besitzt, folgt aus dem Gauß-Lemma, dass eine Kurve $\gamma \in \Lambda(k,a)$ mit $E(\gamma) < E(c^m), d'(\gamma, S^1.c^m) < \delta$ die Geodätische c^m nicht schneidet. Falls nun also $d'(\gamma, S^1.c^m) < \delta$ und $E(\gamma) < E(c^m)$, so hat $K(\gamma(t))$ konstantes Vorzeichen. Da es bei negativer Krümmung in jeder freien Homotopieklasse genau eine kürzeste geschlossene Kurve gibt, gilt $K(\gamma(t)) > 0$. Sei

$$dv^2 + f^2(u,v)du^2$$

mit einer positiven $C^\infty-$Funktion $f : S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^+$ die Metrik in geodätischen Parallelkoordinaten $(u,v) \in S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ basierend auf der Geodätischen $c(u) = (u,0)$. Dann gilt also für alle $u \in S^1$ und $v > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = -K(u,v)f(u,v) < 0$$

Falls $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ und $v(t) \leq \delta$ für alle t, so lassen sich γ und die Parallelkurve $t \mapsto (\delta, v(t))$ durch alle Kurven mit Energie $< E(c^m)$ verbinden. Also ist $U \cap \Lambda(c^m)$ nicht-leer und zusammenhängend. $\square$

Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische auf einer orientierten Fläche M, sei $|\dot{c}| = 1$ und sei $N(t)$ die orientierte Einheitsnormale an c. Ein normales Jacobifeld $Y(t)$ längs $c(t)$ (für das also $\langle Y, c \rangle = 0$ gilt) kann beschrieben werden durch

$$Y(t) = y(t)N(t)\,,$$

wobei die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Jacobi-Gleichung

$$y^n(t) + K(c(t))y(t) = 0 \tag{18}$$

löst. K ist die Gaußsche Krümmung. Für die kovariante Ableitung längs c gilt $\nabla Y(t) = y'(t)$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die symplektische lineare

Abbildung $P_a^b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$P_a^b(y(a), y(a)) = (y(b), y(b))$$

für jede Lösung der Jacobi-Gleichung (18). Wenn y_1 und y_2 die Lösungen mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(a) = 1, y_1(a) = 0, y_2(a) = 0, y_2(a) = 1$$

sind, dann hat bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ P_a^b die Matrixdarstellung

$$P_a^b = \begin{pmatrix} y_1(b) & y_2(b) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} .$$

Für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ gilt $P_{a_1}^{a_3} = P_{a_2}^{a_3} \circ P_{a_1}^{a_2}$. Falls $c(t+L) = c(t)$ für alle t, dann ist P_0^L die linearisierte Poincare-Abbildung der geschlossenen Geodätischen $c|[0.L]$. Sofern die Eigenwerte von $P \in \mathrm{Sp}(1)$ nicht Norm 1 haben, so heißt P *hyperbolisch,* falls P orthogonal ist, so heißt P *elliptisch* und andernfalls *parabolisch.* Wir definieren die folgenden Untermengen von Sp(1):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc = 1; a, d > 1, b, c > 0 \right\} \\ \mathcal{B} &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a > 0 \right\} \end{aligned}$$

Dann besteht $\mathcal{A}$ aus hyperbolischen Elementen (da Spur > 2) und $\mathcal{B}$ aus parabolischen Elementen und es gilt:

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cdot B \in \mathcal{A} \tag{19}$$

Aus dem Vergleichssatz für Lösungen der Jacobi-Gleichung folgt: Wenn $c : [0, L] \to M$ eine Geodätische auf einer orientiebaren Fläche ist und wenn $K(c(t)) < 0$ für $t \in (0.L)$, dann gilt

$$P_0^L \in \mathcal{A} . \tag{20}$$

Für jede Geodätische c, die in eine Kappe C monotoner Krümmung hineinläuft (sei $c(0) \in \partial C$), gibt es eine Zeit $t_0 > 0$, für die der Abstand zum Zentrum der Kappe minimal ist. Dann verläßt c zum Zeitpunkt $2t_0$ wieder die Kappe. Sei y_1 bzw. y_2 die Lösung der Jacobi-Gleichung längs c mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 1, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2(0) = 1$$

Es gilt nach [BG, §2]:

$$y_1(2t_0) = -1, y_1'(2t_0) = 0, y_2(2t_0) < 0, y_2(2t_0) < 0$$

also

$$-P_0^{2t_0} \in \mathcal{B}\,. \tag{21}$$

Sei nun M eine kompakte Fläche, für die die Menge $M^+ := \{p \in M \mid K(p) \geq 0\}$ disjunkte Vereinigung von Kappen $C_1, \ldots, C_m$ monotoner Krümmung ist. Sei $c : [0.L] \to M$ eine geschlossene Geodätische, die nicht mit einem der Ränder ∂C_i übereinstimmt. Dann ist c entweder ganz im Gebiet $\{K < 0\}$ und somit hyperbolisch, oder es gibt eine Partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{2k+1} = L$, so dass c die Länge L hat und $c\left((t_{2i-1}, t_{2i})\right) \subset M^+ = \bigcup_{i=1}^m C_i$ sowie $c((t_{2i}, t_{2i+1})) \subset M - M^+$. Für

$$P_c = P_0^L = P_{t_2k}^{t_{2k+1}} \circ \cdots \circ P_{t_1}^{t_2}$$

gilt nach den Gleichungen (19), (20) und (21):

$$(-1)^k P_0^L \in \mathcal{A},$$

d.h. c ist hyperbolisch. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Theorem 8.2 *Sei (M, g) eine kompakte orientierbare Fläche mit Riemannscher Metrik g, für die die Menge $M^+ = \{K \geq 0\}$ eine Vereinigung disjunkter Kappen $C_1, ..., C_m$ mit monotoner Krümmung ist. Dann sind alle* homologisch sichtbaren *geschlossenen Geodätischen hyperbolisch. Die Randgeodätischen $c_i = \partial C_i, i = 1, ..., m$ mit ihren Iterierten sind genau die homologisch unsichtbaren geschlossenen Geodätischen.*

Bemerkung 8.3 a) In [Do1] und [BG] wird eine Familie invarianter Kegel transversal zur Flußrichtung im Tangentialbündel des Einheitstangentialbündels SM definiert, die unter dem geodätischen Fluß echt in sich abgebildet werden. Daraus kann dann mit Hilfe von Ergebnissen von Wojtkowski gefolgert werden, dass die Lyapunov-Exponenten der Anfangsrichtungen geschlossener Geodätischer, die nicht Ränder von Kappen sind, positiv sind, d. h. diese Geodätischen sind hyperbolisch. Wir haben dies oben direkt gezeigt.

Aus weiteren Eigenschaften dieser Kegelfamilie folgt u. a. auch die Ergodizität des geodätischen Flusses.

b) Nach Theorem 7.13 gibt es also auf einer solchen Fläche unendlich viele geschlossene Geodätische. Nach dem Theorem 7.12 von Hingston gilt für die Anzahl $n(l)$ der geschlossenen Geodätischen mit Länge ¡ l:

$$\liminf_{l\to\infty} n(l)\frac{\log(l)}{l} > 0\,.$$

Die Menge $\overline{M - M^+}$ ist geodätisch konvex. Also bleibt eine geschlossene Kurve nach Anwendung der Birkhoffschen Verkürzungsprozesses in $\overline{M - M^+}$. Damit kann man dann zeigen, dass $n(l)$ sogar exponentiell wächst, wobei es genügt, nur geschlossene Geodätische zu zählen, die lokale Minima des Energiefunktionals sind und in $\overline{M - M^+}$ liegen. Dieses Argument gilt allgemein, wenn eine Fläche vom Geschlecht $g = 0$ drei konkave Scheiben besitzt. (vgl. [Ra4, §4].

c) Wenn die Fläche Geschlecht > 1 hat, so gibt es Metriken mit negativer Gaußscher Krümmung, für die also alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. Damit $g = 0$ gilt, muß es also nach dem Satz von Gauß-Bonnet drei Kappen geben, für $g = 1$, (den 2-Torus T^2) genügt eine Kappe.

d) Eine geschlossene Geodätische c heißt *stabil*, Wenn alle Flußlinien des geodätischen Flusses, die hinreichend nahe an der periodischen Flußlinie $\dot{c}$ liegen, für alle Zeiten nahe bei c bleiben. Dann besteht die Normalform der linearisierten Poincaré-Abbildung aus 2-dimensionalen Rotationen und aus

Reflektionen, (vgl. Beispiel 3.1 b). Der unstabilste Fall ist der Fall einer hyperbolischen geschlossenen Geodätischen.

Poincaré [Po] behauptete die Existenz einer einfachen nicht-hyperbolischen geschlossenen Geodätischen auf einer konvexen Fläche. Aber Grjuntal zeigt in [Gj], dass es in jeder C^1-Umgebung der Standard-Metrik auf S^2 konvexe Metriken gibt, für die alle einfachen geschlossenenen Geodatischen hyperbolisch sind.

Wenn die Gaußsche Krümmung K einer metrik auf S^2 die Ungleichung $1/4 \leq K \leq 1$ erfüllt, dann gibt es eine einfache nicht-hyperbolische geschlossenen Geodätische der Länge $L \in [2\pi, 4\pi]$. Dies wurde von Thorbergsson in [Th] gezeigt, weitere Ergebnisse über Stabilitätseigenschaften kurzer geschlossener Geodätischen auf Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung sind in [BTZ1] und [BTZ3] enthalten. Mit Hilfe eines lokalen Störungssatzes von Klingenberg-Takens [KT] kann man schließen: Es gibt eine C^4-offene und dichte Teilmenge $\mathcal{V}$ in der Menge der Metriken auf S^2 mit $1/4 < K \leq 1$, so dass jede Metrik $g \in \mathcal{V}$ eine geschlossene Geodätische vom Twist-Typ hat. Aus der KAM-Theorie folgt dann, dass c stabil ist und damit, dass der geodätische Fluß nicht ergodisch ist.

Im Gegensatz dazu sind alle geschlossenen Geodätischen einer Metrik auf S^2, die die Voraussetzungen des vorangegangenen Theorems erfüllen, instabil.

Metriken auf S^2, die die Voraussetzungen des vorangegangenen Theorems erfüllen und gewissen zusätzliche Symmetrieeigenschaften haben, können wie folgt konstruiert werden: Wähle $m \geq 3$, sein M_m eine Fläche konstanter Krümmung $K \equiv -1$, die diffeomorph zu S^2 ist, aus der m Punkte entfernt wurden und deren Ränder aus einfachen geschlossenen Geodätischen $c_1, \ldots, c_m$ bestehen.

Außerdem gebe es eine Isomnetrie F von M der Ordnung m, für die $F(c_i) = c_{i+1}$ (Indices modulo m) und falls $m = 2k$ gerade) eine fixpunktfreie Involution $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(c_i) = c_{i+k}$. Die Abbildungen F, F sind Einschränkungen einer Rotation von S^2 um den Winkel $2\pi/m$ bzw. der Antipodenabbildung von S^2 nach Aufsetzen von Kappen ung geeigneter Wahl der Standardmetrik. Sei $\delta > 0$ eine Zahl, so dass die $2\delta-$Tubenumgebungen von $c_1, \ldots, c_m$ sich nicht schneiden. Dann wird die Metrik auf M_m so geändert, dass in der $\delta-$Tubenumgebung der Ränder die Matrik rotationssymmetrisch ist, die Ränder Geodätische bleiben und die Krümmung vom Rand aus von 0 aus monoton fällt, bis sie -1 erreicht. Nach [BG, Prop.2.1] kann man glatt Kappen mit monotoner Krümmung aufsetzen.

So können wir also Flächen vom Geschlecht 0 mit Metrik g_m erhalten, die die Voraussetzungen des Theorems 8.2 erfüllen und eine Isometrie F bzw. $\tilde{F}$, sofern $= 2k$ haben, die Ordnung m und 2 Fixpunkte hat (bzw. eine fixpunktfreie Involution $\tilde{F}$ ist). Die Isometrie F wird es ermöglichen, Metriken anzugeben, bei denen alle isometrie-invarianten Geodätischen hyperbolisch sind. Die Isometrie $\tilde{F}$ wird ermöglichen, Metriken auf der reell-projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2 = S^2/\tilde{F}$ zu konstruieren.

Theorem 8.4 *a) Für $m \geq 3$ gilt: Es gibt Metriken auf S^2, für die alle homologisch sichtbaren geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind. Es gibt dabei genau m homologisch unsichtbare geschlossene Geodätische, deren linearisierte Poincaré-Abbildung parabolisch ist.*

b) Für $m \geq 3$ gilt: Es gibt Riemannsche Metriken auf S^2 mit einer Isometrie F der Ordnung m, so dass alle F-invarianten Geodätischen hyperbolisch sind.

c) Es gibt Riemannsche Metriken auf der reell-projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ und auf dem Torus T^2, auf der alle nicht-nullhomotopen geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind.

Es ist nun möglich, diese Metriken so zu stören, dass alle geschlossenen Geodätischen unterhalb einer vergegebenen Länge hyperbolisch sind:

Theorem 8.5 *Für $L > 0$ und $r \geq 2$ gibt es in jeder C^r-Umgebung der*

Metrik g_m von S^2 eine Metrik g, für die alle geschlossenen Geodätischen der Länge $< L$ hyperbolisch sind.

Beweis: Für $a > L$ wählen wir eine endlich-dimensionale Approximation $\Lambda(k,a)$. $\Lambda(k,a)$ trägt eine kanonische Metrik, die von der Produktmetrik auf $M \times \cdots \times M$ induziert wird. Die primen geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen von (S^2, g_m) mit Länge $< L$ seien zum einen die Randgeodätischen $c_1, \ldots, c_m$ der Kappen und die hyperbolischen geschlossenen Geodätischen $d_1, \ldots, d_N$ bilden nicht-degenerierte kritische Bahnen, deshalb gilt für gegebenes $\delta' > 0$ für jede Metrik $\tilde{g}$ in einer genügend kleinen C^r-Umgebung von g_m, dass $d_1, \ldots, d_N$ die hyperbolischen geschlossenen Geodätischen von g sind mit Länge $< L$. Dabei liegt d_i in einer δ'-Umgebung einer Iterierten c_i^k einer Randgeodätischen $c_i, i \in \{1, \ldots, m\}$.

Nach Konstruktion der Metriken g_m läßt sich g_m für einen festes $\delta > 0$ in einer Tubenumgebung $(u,v) \in S^1 \times (-\delta, \delta)$ von einer Randgeodätischen $c_i = S^1 \times 0$ in geodätischen Parallelkoordinaten basierend auf $c_i(u) = (u, 0)$ schreiben als

$$f^2(v)du^2 + dv^2.$$

Dabei ist $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^+$ eine positive $C^\infty-$Funktion und es gilt

$$f'(0) = 0, f''(v) \cdot v < 0$$

für $v \neq 0$.

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wähle eine $C^\infty-$Funktion $f_\varepsilon : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^+$ mit $|f - f_\varepsilon|_{C^r} < \varepsilon, f'_\varepsilon < 0$ und $f(v) = f_\varepsilon(v)$ für alle v mit $|v| \in (\delta/2, \delta)$. Dann ist die Metrik g'_ε auf $S^1 \times (-\delta, \delta)$ mit

$$g'_\epsilon = f_\epsilon^2(v)du^2 + dv^2$$

eine rotationssymmetrische Metrik. Da $f'_\epsilon < 0$ in $(-\delta, \delta)$, folgt nach der Clairautschen Relation für Geodätische auf Drehflächen: Jede Geodätische c von g'_ϵ schneidet den Rand $S^1 \times \{-\delta, \delta\}$. Wenn also g_ε auf S^2 die Metrik ist, die außerhalb der δ-Tubenumgebung der Ränder der Kappen von g_m mit g_m übereinstimmt und in diesen Tubenumgebungen durch g'_ϵ gegeben ist, und wenn $\delta' < \delta$, dann hat jede geschlossene Geodätische einer Metrik g_ϵ für genügend kleines $\epsilon > 0$ Abstand $\delta > \delta'$ von jedem Rand der Kappen (gemessen in der ursprünglichen Metrik g_m).

9 Stark holprige Metriken

In diesem Kapitel zeigen wir mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 7 und lokaler Störungsargumente sowie des *bumpy metric theorem* , daß für $2 \leq r \leq \infty$ eine C^r–generische Riemannsche Metrik auf einer kompakten einfach–zusammenhängenden Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische besitzt. Wir studieren in diesem Kapitel Riemannsche Metriken.

Für Finsler–Metriken folgt aus dem Schließungslemma für Hamiltonsche Systeme, daß für eine C^2–generische Finsler–Metrik die Menge der Tangentialvektoren an geschlossene Geodätische dicht im Einheitstangentialbündel ist, insbesondere gibt es also unendlich viele geschlossene Geodätische.

9.1 Lokale Störung der Poincaré–Abbildung einer geschlossenen Geodätischen und das *bumpy metric theorem*

Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}^r = \mathcal{G}^r(M)$ die Menge der C^r–differenzierbaren Riemannschen Metriken auf der kompakten Mannigfaltigkeit M mit der starken C^r–Topologie. Für $2 \leq r < \infty$ trägt $\mathcal{G}^r$ nach Wahl einer Metrik die Struktur einer offenen Teilmenge eines Banachraums, für $r = \infty$ die Struktur einer offenen Teilmenge eines Fréchetraums. Insbesondere ist nach dem Satz von Baire eine residuale Teilmenge in $\mathcal{G}^r$ dicht in $\mathcal{G}^r$. Eine Eigenschaft einer Metrik heißt C^r*–generisch*, falls die Menge der Metriken in $\mathcal{G}^r$, die diese Eigenschaft erfüllen, eine residuale Teilmenge enthält.

Der *geodätische Fluß* $\phi_g^t : TM \to TM$ auf dem Tangentialbündel für die Riemannsche Metrik g ist definiert durch $\phi_g^t(v) = \dot{c}_v(t)$, wobei $c_v : \mathbb{R} \to M$ die durch die Anfangsrichtung $v = \dot{c}_v(0)$ eindeutig bestimmte Geodätische ist.

Das doppelte Tangentialbündel TTM besitzt dank des Levi–Civita Zusammenhangs auf M die Zerlegung

$$T_X TM = T_X^v TM \oplus T_X^h TM \; , \; Z = Z^v + Z^h$$

in den *vertikalen* und den *horizontalen* Unterraum. Sei $\tau : TM \to M$ die Fußpunktprojektion des Tangentialbündels. Wenn $v : (-\epsilon, \epsilon) \to TM \; , \; \epsilon > 0$ eine differenzierbare Kurve im Tangentialbündel ist, dann ist die Anfangsrichtung $\dot{v}(0) \in T_{v(0)} TM$ ein doppelter Tangentialvektor. Der vertikale Unterraum $T_X^v TM$ wird aufgespannt von den doppelten Tangentialvektoren $\dot{v}(0)$ zu Kurven $v(t) \in TM$ mit $v(0) = X$ und $\tau(v(t)) = \tau(X)$, d.h. $v(t) \in T_{\tau(X)} M$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Der horizontale Unterraum $T_X^h TM$ wird aufgespannt von den doppelten Tangentialvektoren $\dot{v}(0)$, wobei $p(t) \in M \; , \; t \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine Kurve auf M ist mit $p(0) = \tau(X)$ und $v(t) \in T_{p(t)} M$ ein paralleles Vektorfeld längs p mit $v(0) = X$ ist.

Sowohl der horizontale Unterraum $T_X^h TM$ wie auch der vertikale Unterraum $T_X^v TM$ kann mit dem Tangentialraum $T_{\tau(X)} M$ identifiziert werden. Für $Y, Z \in TTM$ wird durch

$$2\omega(Y, Z) = g(Y^h, Z^v) - g(Y^v, Z^h)$$

auf TM eine *symplektische Form* definiert. Dadurch wird das Tangentialbündel TM zusammen mit der *Hamilton–Funktion* $H : TM \to \mathbb{R} \, , \; H(X) = g(X, X)/2$ zu einem *Hamiltonschen System*. Der geodätische Fluß ist dann der zugehörige Hamiltonsche Fluß.

Im Abschnitt 5.1 haben wir diskutiert, wie eine Finsler–Metrik im Lagrangeschen bzw. Hamiltonschen Formalismus beschrieben wird. Im Falle einer Riemannschen Metrik ist die Legendre–Transformation gerade der durch die Metrik bestimmte kanonische Diffeomorphismus zwischen Tangential– und Kotangentialbündel. Dann fallen also – bis auf diesen Diffeomorphismus – Lagrangesche und Hamiltonsche Beschreibung zusammen.

Da der geodätische Fluß die Länge der Tangentialvektoren erhält, genügt es auch, die Einschränkung

$$\phi_g^t : T_g^1 M \to T_g^1 M$$

des geodätischen Flusses auf das *Einheitstangentialbündel*

$$T_g^1 M := \{X \in TM \,|\, g(X,X) = 1\}$$

zu betrachten. Geschlossene Geodätische auf M sind genau die Projektionen auf M von periodischen Flußlinien des geodätischen Flusses. $\{\phi_g^t(v) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ ist eine periodische Flußlinie mit (minimaler) Periode $a > 0$ genau dann, wenn $c(t) = \tau(\phi_g^t(v))$ eine (prime) geschlossene Geodätische der Länge a ist.

Für eine periodische Flußlinie $\gamma = \{\phi_g^t(v) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ der Periode $a > 0$ und eine zu v transversale Hyperfläche in $T_g^1 M$ definieren wir die *Poincaré–Abbildung* $\mathcal{P}_g(\Sigma, \gamma)$ wie folgt: Es seien Σ_0 und Σ_a offene Umgebungen von v in Σ, so daß es eine differenzierbare Funktion $\delta : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ mit $\delta(v) = a$ gibt, und so daß

$$\mathcal{P}_g(\Sigma, \gamma) : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_a \,,\; X \mapsto \phi_g^{\delta(X)}(X)$$

ein Diffeomorphismus ist. Fixpunkte der Poincaré–Abbildung sind also periodische Bahnen des geodätischen Flusses. Die symplektische Form ω auf TM induziert eine symplektische Form auf der $(2n-2)$–dimensionalen lokalen Hyperfläche Σ. Dann ist $\mathcal{P}_g(\Sigma, \gamma)$ ein symplektischer Diffeomorphismus. Man kann Σ so wählen, daß die *linearisierte Poincaré–Abbildung* $P_g(\gamma) = P_c = d\mathcal{P}_g(\Sigma, \gamma)(v)$ eine symplektische lineare Abbildung des $\mathbb{R}^{2n-2} = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ mit der Standard symplektischen Form ist, wobei wir $\mathbb{R}^{n-1}$ mit dem orthogonalen Komplement von v in $T_{c(0)}M$ identifizieren. Dann gilt

$$P_g(\gamma)(J(0), \nabla J(0)) = (J(a), \nabla J(a))\,,$$

wobei J das normale Jacobifeld (normal zu $\dot{c}$) längs der geschlossenen Geodätischen $c = \tau \circ \gamma$ ist, d.h. diese Definition stimmt mit der in Kapitel 2 gegebenen überein. Die linearisierte Poincaré–Abbildung ist bis auf Konjugation in der

Gruppe $\mathrm{Sp}(n-1)$ der linearen symplektischen Abbildungen des $\mathbb{R}^{2n-2}$ unabhängig von den getroffenen Wahlen.

Eine periodische Flußlinie $\gamma = \{\phi_g^t(v) \,|\, t \in [0,a]\}$ heißt *prim*, falls $a > 0$ die minimale Periode ist, d.h. genau dann, wenn die korrespondierende geschlossene Geodätische $c(t) = \tau(\phi_g^t(v))$, $t \in [0,a]$ prim ist. Eine periodische Flußlinie heißt *nicht–degeneriert*, falls 1 kein Eigenwert der linearisierten Poincaré–Abbildung ist, d.h. genau dann, wenn die zugehörige geschlossene Geodätische nicht–degeneriert ist. Dann ist γ eine isolierte periodische Flußlinie, bzw. c ist eine isolierte geschlossene Geodätische.

Eine Riemannsche Metrik g heißt *holprig* (englisch *bumpy*), falls alle periodischen Flußlinien des geodätischen Flusses bzw. alle geschlossenen Geodätischen nicht–degeneriert sind. Da mit $\gamma = \{\phi_g^t(v) \,|\, t \in [0,a]\}$ auch $\gamma^m = \{\phi_g^t(v) \,|\, t \in [0, ma]\}$ eine periodische Flußlinie ist – die dann der Iterierten c^m der geschlossenen Geodätischen c entspricht – ist dies äquivalent zu der Annahme: Wenn $z = \exp(2\pi i \lambda)$ ein Eigenwert von $P_g(\gamma) = P_c$ einer primen periodischen Flußlinie γ ist, dann ist λ irrational.

Sei $\mathcal{G}_b^r$ die Menge aller holprigen Metriken in $\mathcal{G}^r$. Für $t > 0$ sei $\mathcal{G}_b(t)$ die Menge aller Metriken in $\mathcal{G}_r$, für die alle periodischen Flußlinien mit der Periode $\leq t$ nicht–degeneriert sind. Wenn also γ eine prime periodische Flußlinie ist mit Periode $a \leq t$ und wenn z Eigenwert von $P_g(\gamma)$ ist, dann gilt also $z^l \neq 1$ für alle $l \in \{1, 2, \ldots, [t/a]\}$. Für $g \in \mathcal{G}_b(t)$ gibt es also nur endlich viele periodische Flußlinien mit Periode $\leq t$.

Wir werden das folgende lokale Störungsargument von Klingenberg und Takens verwenden:

Satz 9.1 [KT, thm.2] *Sei $\gamma = \{\phi_{g_0}^t(v)\}$ eine periodische Flußlinie der Periode $a > 0$ des geodätischen Flusses $(\phi_{g_0}^t)$ der Metrik $g_0 \in \mathcal{G}^r$, $r \geq 2$. Sei $W \subset M$ eine offene Umgebung des Punktes $\tau(v) \in M$ auf M und sei $\mathcal{G}^r(\gamma, g_o, W)$ die Menge der Metriken $g \in \mathcal{G}^r$, für die γ eine periodische Flußlinie der Periode $a > 0$ ist und für die der Träger* $\mathrm{supp}(g - g_0)$ *in W liegt.*

Wenn dann Q eine offene und dichte invariante Teilmenge der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n-1)$ *ist, dann gibt es zu jeder offenen Umgebung* $\mathcal{V}$ *von* g_0 *in* $\mathcal{G}^r$ *eine Metrik* $g \in \mathcal{V} \cup \mathcal{G}^r(\gamma, g_0, W)$*, so daß* $P_g(\gamma) \in Q$*.*

Abraham gibt in [Ab] das *bumpy metric theorem* an, Anosov gibt in [An2] einen vollständigen Beweis. Es folgt aus dem

Lemma 9.2 [An2, §4] *a)* $\mathcal{G}_b^r(t)$ *ist offen in* $\mathcal{G}^r$*.*

b) $\mathcal{G}_b^r(t)$ *ist dicht in* $\mathcal{G}^r$*.*

Zum Beweis der Aussage b) benötigt man den lokalen Störungssatz 9.1 von Klingenberg–Takens und einen Transversalitätssatz von Abraham. Da

$$\mathcal{G}_b^r = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_b^r(k)$$

folgt aus diesem Lemma direkt das

Theorem 9.3 (bumpy metric theorem) [Ab], [An2] *Für eine kompakte Mannigfaltigkeit* M *und* $2 \le r \le \infty$ *ist die Menge der holprigen Metriken* $\mathcal{G}_b^r$ *eine residuale Menge in* $\mathcal{G}^r$*.*

Man sagt auch kurz, eine C^r–generische Metrik mit $2 \le r \le \infty$ ist holprig. Die folgende Aussage wird im Beweis des Teils b) des Lemma 9.2 benutzt:

Lemma 9.4 [An2, §4] *Sei* $g_0 \in \mathcal{G}_b^r(t)$ *und seien* $\{\phi_{g_0}^t(v_1)\}, \ldots, \{\phi_{g_0}^t(v_N)\}$ *die primen periodischen Flußlinien mit Perioden* $a_1, \ldots, a_N \in (0, t]$*. Dann gibt es eine offene Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* g_0 *in* $\mathcal{G}^r$ *und stetige Abbildungen* $v_k : \mathcal{U} \to TM$, $a_k : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$, $k = 1, \ldots, N$*, so daß* $v_k(g) \in T_g^1 M$, $v_k(g_0) = v_k, a_k(g_0) = a_k$ *mit folgender Eigenschaft: Für jedes* $g \in \mathcal{U}$ *sind*

$$\{\phi_g^t(v_1(g))\}, \ldots, \{\phi_g^t(v_N(g))\}$$

prime periodische Flußlinien mit Perioden $\{a_1(g), \ldots, a_N(g)\}$ *und es gibt keine weiteren primen periodischen Flußlinien von* g *mit Periode* $\le t$*.*

Falls $a_k(g_0) = t$, so gibt es $g \in \mathcal{U}$ mit $a_k(g) > t$. Für die Anzahl $m(g;t)$ der primen periodischen Flußlinien mit Periode $\leq t$ gilt also $m(g;t) \leq m(g_0;t)$.

Ausgehend vom *bumpy metric theorem* kann man nun die periodischen Flußlinien individuell stören und so zu Aussagen über generische Eigenschaften geodätischer Flüsse kommen. So gilt das

Theorem 9.5 *(*Klingenberg–Takens [KT, thm.1]*) Sei Q eine offene und dichte invariante Teilmenge der symplektischen Gruppe* $\mathrm{Sp}(n-1)$ *und M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $2 \leq r \leq \infty$. Dann ist die Menge der Metriken in $\mathcal{G}^r$, für die die linearisierte Poincaré–Abbildung jeder geschlossenen Geodätischen in Q liegt, residual.*

9.2 Eine generische Metrik ist stark holprig

Im Abschnitt 4.3 haben wir die invarianten Teilmengen $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$ der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$ definiert. Für $P \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$ ist weder 1 noch -1 ein Eigenwert, $P \in \mathrm{Sp}^*(n)$ liegt in $\mathrm{Sp}^*(n)$, wenn P nur einfache Eigenwerte hat. $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$ und $\mathrm{Sp}^*(n)$ sind offene und dichte Teilmengen von $\mathrm{Sp}(n)$, vgl. Satz 4.8. Also sind die Mengen $\tilde{\mathcal{G}}(t)$ bzw. $\mathcal{G}^*(t)$ der Metriken $g \in \mathcal{G}^r$, für die $P_g(\gamma) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(n-1)$ bzw. $\in \mathrm{Sp}^*(n-1)$ für jede periodische Flußlinie mit Periode $\leq t$ gilt, offen und dicht in $\mathcal{G}^r$ und die Mengen

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}(\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(n)$$

bzw.

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*(\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^*(n)$$

sind residual nach Theorem 9.5. Falls die linearisierte Poincaré–Abbildung $P_g(\gamma)$ einer periodischen Flußlinie hyperbolisch ist, d.h. keinen Eigenwert vom Betrag 1 hat, so heißt sie – wie die korrespondierende geschlossene Geodätische – *hyperbolisch.*

Für $t > 0$ und eine Metrik $g \in \mathcal{G}^*(t)$ definieren wir die *Folge* $\Lambda_g(t) = (\lambda_i(g))_{i=1,\dots,n(g;t)}$ *der Poincaré–Exponenten*. Wenn alle periodischen Flußlinien mit Periode $\leq t$ hyperbolisch sind, setzen wir $n(g;t) = 0$ bzw. $\Lambda_g(t) = \emptyset$. Andernfalls seien $(\gamma_k)_{k=1,\dots,m(g;t)}$, $m(g;t) \geq 1$ die nicht–hyperbolischen primen periodischen Flußlinien mit Perioden $(a_k)_{k=1,\dots,m(g;t)}$, $0 < a_k \leq t$. Seien für $k \in \{1,\dots,m(g;t)\}$

$$0 < \lambda_{k,1} < \lambda_{k,2} < \cdots < \lambda_{k,l(k)} < \frac{1}{2}$$

die Poincaré–Exponenten der linearisierten Poincaré–Abbildung $P_k = P_g(\gamma_k) \in \mathrm{Sp}^*(n-1)$ von γ_k, d.h.

$$z_1 = \pm\exp(2\pi i\lambda_{k,1}),\dots,z_{l(k)} = \pm\exp(2\pi i\lambda_{k,l(k)})$$

sind die Eigenwerte mit Norm 1 von $P_k \in \mathrm{Sp}(l(k);n-1)$. Dann definieren wir die Folge $\Lambda_g(t) = (\lambda_1(g),\dots,\lambda_{n(g;t)}(g))$ durch $\lambda_{L(k)+l}(g) = \lambda_{k,l}$, $1 \leq l \leq l(k)$ mit $L(k) := \sum_{r=1}^{k-1} l(r)$, also $n(g;t) = L(m(g;t)+1)$. Es ist also

$$\begin{aligned}\Lambda_g(t) &= \Big(\lambda_1(g),\dots,\lambda_{n(g;t)}(g)\Big)\\ &= \Big(\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,l(1)},\lambda_{2,1},\dots,\lambda_{m(g;t),l(m(g;t))}\Big)\end{aligned}$$

Wenn $g \in \mathcal{G}^* = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}^*(n)$, dann heißt

$$\Lambda_g = (\lambda_i)_{i=1,\dots,n(g)}$$

die *Folge der Poincaré–Exponenten* von g. Hierbei ist $n(g) = 0$ bzw. $\Lambda_g = \emptyset$, wenn alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind und $n(g) = \infty$, falls es unendlich viele (geometrisch verschiedene) nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische gibt.

Sei $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_d]^*$ die Menge der Polynome $p \neq 0$ mit d Variablen und ganzzahligen Koeffizienten, d.h.

$$p = p(x_1,\dots,x_d) = \sum_{0 \leq i_1,\dots,i_d} a_{i_1,\dots,i_d} x^{i_1}\cdots x^{i_d}$$

und $a_{i_1,\dots,i_d} \in \mathbb{Z}$.

Definition 9.6 Eine Metrik $g \in \mathcal{G}^*$ auf einer kompakten Mannigfaltigkeit mit der Folge $\Lambda_g = (\lambda_i(g))_{i=1,\ldots,n(g)}$ der Poincaré–Exponenten heißt *stark holprig*, falls entweder alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind (d.h. $n(g) = 0$ bzw. $\Lambda_g = \emptyset$) oder falls für alle $d \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq d \leq n(g)$ und für alle Polynome $p \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]^*$

$$p(\lambda_1(g), \ldots, \lambda_d(g)) \neq 0$$

gilt (d.h. die Poincaré–Exponenten sind algebraisch unabhängig). $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_s^r$ sei die Menge der stark holprigen Metriken in $\mathcal{G} = \mathcal{G}^r$.

Wir wollen zeigen, daß die Menge $\mathcal{G}_s$ residual in $\mathcal{G}^r$ ist. Dazu definieren wir für $d \in \mathbb{N}$, $L > 0$: $p(d, L) = p(d, L)(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]^*$ als das Produkt aller Polynome in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]^*$, deren Grad höchstens L ist und für die der absolute Betrag der Koeffizienten höchstens L ist. Dieses Polynom ist symmetrisch. Sei $\mathcal{G}_s(t)$ die Menge der Metriken $g \in \mathcal{G}^*(t)$, für die

$$p(n(g;t), t)(\lambda_1(g), \ldots, \lambda_{n(g;t)}(g)) \neq 0$$

falls $n(g;t) \geq 1$.

Lemma 9.7 *Für $2 \leq r \leq \infty$ ist $\mathcal{G}_s(t)$ eine offene und dichte Teilmenge von $\mathcal{G}^r$.*

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{G}_s(t)$ offen ist. Wenn $n(g_0; t) = 0$, d.h. wenn alle primen periodischen Flußlinien mit Periode $\leq t$ hyperbolisch sind, dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von g_0 in $\mathcal{G}^r$ mit $n(g;t) = 0$ für alle $g \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}_s(t)$. Sei $n(g_0; t) > 0$ und seien $\{\phi_{g_0}^t(v_k)\}, k = 1, \ldots, m(g;t)$ die primen nicht–hyperbolischen periodischen Flußlinien mit Perioden $0 < a_k \leq t$. Dann gibt es nach Lemma 9.4 eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von g_0 und stetige Abbildungen $v_k : \mathcal{U} \to TM$, $a_k : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$, $k = 1, \ldots, m(g;t)$, so daß $\gamma_k(g) = \{\phi_g^t(v_k(g))\}$ prime periodische Flußlinien von (ϕ_g^t) mit Perioden

$a_k(g)$ sind und so daß $\gamma_k(g_0) = \gamma_k$, $a_k(g_0) = a_k$, $v_k(g_0) = v_k$, und so daß es keine weiteren primen periodischen Flußlinien von $g \in \mathcal{U}$ mit Periode $\leq t$ gibt. Dann ist die Abbildung

$$P_k : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Sp}(n-1) \, , \, g \mapsto P_g(\gamma_k)$$

für jedes k stetig (da $r \geq 2$). Da $P_{g_0}(\gamma_k) \in \mathrm{Sp}(l(k), n-1)$ und da $\mathrm{Sp}(l(k), n-1)$ offen ist in $\mathrm{Sp}(n-1)$ (vgl. Satz 4.8), gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ von g_0, so daß $P_g(\gamma_k(g)) \in \mathrm{Sp}(l(k); n-1)$ für alle $g \in \mathcal{U}_1$ (d.h. $l(k)$ hängt nicht von g ab). Es seien $\lambda_j(g), j = 1, \ldots, n(g_0; t)$ die Poincaré–Exponenten der primen periodischen Flußlinien $\gamma_k(g), k = 1, \ldots, m(g_0; t)$. Hierbei ist zu beachten, daß im allgemeinen $m(g_0; t) \geq m(g; t)$. Durch

$$F_t : \mathcal{U}_1 \to (0, 1/2)^{n(g_0;t)} \, , \, F_t(g) = (\lambda_1(g), \ldots, \lambda_{n(g_0;t)}(g))$$

wird dann eine stetige Abbildung definiert. Da $g_0 \in \mathcal{G}_s(t)$, gilt $p(n(g_0, t); t)(F_t(g_0)) \neq 0$. Also gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}_2$ von g_0 in $\mathcal{G}^r$ mit $p(n(g_0; t), t)(F_t(g)) \neq 0$ für alle $g \in \mathcal{U}_2$. Da $n(g_0; t) \geq n(g; t)$ ist das Polynom $p(n(g; t), t)$ ein Faktor des Polynoms $p(n(g_0; t), t)$, also gilt $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{G}_s(t)$.

b) Wir zeigen, daß $\mathcal{G}_s(t)$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{G}^*(t)$ ist. Dies genügt, da $\mathcal{G}^*(t)$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{G} = \mathcal{G}^r$ ist. Sei $g_0 \in \mathcal{G}^*(t)$, wenn $n(g_0; t) = 0$, dann gilt $g_0 \in \mathcal{G}_s(t)$. Sei $n(g_0; t) > 0$ und seien $(\gamma_k)_{k=1,\ldots,m(t)}$ die primen periodischen nicht–hyperbolischen Flußlinien von g_0 mit Perioden $(a_k)_{k=1,\ldots,m(t)}$, $0 < a_k \leq t$ und linearisierten Poincaré–Abbildungen $P_k = P_{g_0}(\gamma_k) \in \mathrm{Sp}(l(k); n-1)$ und $c_k, k = 1, \ldots, m(t)$ die zugehörigen geschlossenen Geodätischen auf M. Sei $L(k) := \sum_{r=1}^{k-1} l(r)$, d.h. $\lambda_1(g_0), \ldots, \lambda_{L(k)}$ sind die Poincaré–Exponenten der Bahnen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$. $\mathcal{U}$ sei eine offene Umgebung von g_0 in $\mathcal{G}^*(t)$, die dann also auch offen in $\mathcal{G}$ ist. Wir zeigen mit vollständiger Induktion über $k \in \{1, \ldots, m(t)\}$, daß $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_s(t) \neq \emptyset$, d.h. wir stören nacheinander jede der primen periodischen Bahnen einzeln und erhalten eine Metrik in $\mathcal{G}_s(t)$.

Seien W_k für $k = 1, \ldots, m(t)$ paarweise disjunkte offene Umgebungen von Punkten $p_k = \tau(\phi_{g_0}^{t_k}(v_k)) = c_k(t_k)$ auf den Geodätischen $c_k, k = 1, \ldots, m(t)$ auf M. Für $P \in \mathrm{Sp}(l; n-1)$ seien

$$0 < \lambda_1(P) < \cdots < \lambda_l(P) < \frac{1}{2}$$

die Poincaré–Exponenten, d.h. $z_j = \pm \exp(2\pi i \lambda_j(P))$ sind die Eigenwerte von P mit Norm 1. Dann ist die invariante Untermenge

$$\begin{aligned} Q_1 : \; &= \; \{P \in \mathrm{Sp}(n-1) \,|\, P \in \mathrm{Sp}(l(1); n-1) \Rightarrow \\ &\qquad p(l(1), t)(\lambda_1(P), \ldots, \lambda_{l(1)}(P)) \neq 0\Big\} \end{aligned}$$

nach Lemma 4.10 eine offene und dichte Untermenge von $\mathrm{Sp}(n-1)$. Also gibt es nach dem lokalen Störungssatz 9.1 eine Metrik $g_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{G}(\gamma_1, g_0, W_1)$ mit $P_{g_1}(\gamma_1) \in \mathrm{Sp}(l(1); n-1) \cap Q_1$. Also hat g_1 dieselben primen periodischen Flußlinien $\{\gamma_k\}_{k=1,\ldots,m(t)}$ mit denselben Perioden $\{a_k\}_{k=1,\ldots,m(t)}$ wie g_0 und es gilt:

$$p(l(1), t)(\lambda_1(g_1), \ldots, \lambda_{l(1)}(g_1)) \neq 0 \,.$$

Dabei unterscheiden sich die Metriken g_0 und g_1 nur in der Umgebung W_1, d.h. die Metrik in der Umgebung der anderen Geodätischen $c_2, \ldots, c_{m(t)}$ ist unverändert.

Wir nehmen nun an, daß es für $k \geq 2$ eine Metrik $g_{k-1} \in \mathcal{G}^*(t) \cap \mathcal{U}$ gibt mit denselben primen periodischen Flußlinien $\{\gamma_j\}_{j=1,\ldots,m(t)}$ mit denselben Perioden $\{a_j\}_{j=1,\ldots,m(t)}$ wie g_0 und so daß

$$p(L(k), t)(\lambda_1(g_{k-1}), \ldots, \lambda_{L(k)}(g_{k-1})) \neq 0 \,.$$

Nun betrachten wir das Polynom

$$\tilde{p}_k(x_1, \ldots, x_{l(k)}) = p(L(k+1), t)(\lambda_1(g_{k-1}), \ldots, \lambda_{L(k)}(g_{k-1}), x_1, \ldots, x_{l(k)})$$

in den Variablen $x_1, \ldots, x_{l(k)}$. Dann gilt

$$\tilde{p}_k(x_1, \ldots, x_{l(k)}) = p(L(k), t)(\lambda_1(g_{k-1}), \ldots, \lambda_{L(k)}(g_{k-1})) \cdot p_1(x_1, \ldots, x_{l(k)})$$

wobei nach Induktionsvoraussetzung der erste Faktor nicht verschwindet. Nach der Definition von $p(L(k+1),t)$ ist der zweite Faktor p_1 das Produkt von Polynomen $q \neq 0$ der folgenden Form:

$$q(x_1,\ldots,x_{l(k)}) = \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_{l(k)}} p_{i_1,\ldots,i_{l(k)}}(\lambda_1(g_{k-1}),\ldots,\lambda_{L(k)}(g_{k-1}))x_1^{i_1}\cdots x_{l(k)}^{i_{l(k)}}\,.$$

Dabei ist $p_{i_1,\ldots,i_{l(k)}}$ ein Polynom mit $L(k)$ Variablen vom Grad $\leq t$ mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Beträge durch t beschränkt sind. Da $q \neq 0$, gibt es ein Tupel $(j_1,\ldots,j_{l(k)})$, so daß $p_{j_1,\ldots,j_{l(k)}} \neq 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$p_{j_1,\ldots,j_{l(k)}}(\lambda_1(g_{k-1}),\ldots,\lambda_{L(k)}(g_{k-1})) \neq 0\,,$$

also ist p_1 ein in den Variablen $x_1,\ldots,x_{l(k)}$ nicht identisch verschwindendes Polynom mit reellen Koeffizienten. Die Menge

$$Q_k := \{P \in \mathrm{Sp}(n-1)\ |P \in \mathrm{Sp}(l(k);n-1) \Rightarrow \\ p(L(k+1),t)(\lambda_1(g_k),\ldots,\lambda_{L(k)}(g_k),\lambda_1(P),\ldots,\lambda_{l(k)}(P)) \neq 0\Big\}$$

ist nach Lemma 4.10 eine offene und dichte Teilmenge von $\mathrm{Sp}(n-1)$. Nach dem lokalen Störungssatz 9.1 und nach Teil a) dieses Beweises gibt es also eine Metrik $g_k \in \mathcal{U} \cap \mathcal{G}^r(\gamma_k, g_{k-1}, W_k)$ mit

$$P_{g_k}(\gamma_k) \in Q_k \cap \mathrm{Sp}(l(k);n-1)\,.$$

g_k ist also eine Metrik mit denselben primen periodischen Flußlinien $\{\gamma_j\}_{j=1,\ldots,m(t)}$ und denselben Perioden $\{a_j\}_{j=1,\ldots,m(t)}$ wie g_{k-1} und damit wie g_0. Außerdem stimmen für $j \neq k$ die linearisierten Poincaré–Abbildungen $P_g(\gamma_j)$ für $g = g_{k-1}$ und $g = g_k$ überein.

Nach $m(t)$ Schritten erhalten wir also eine Metrik $g = g_{m(t)}$ mit denselben primen periodischen Flußlinien und denselben Perioden wie g_0. Die Folge $\Lambda_g(t) = (\lambda_1(g),\ldots,\lambda_{n(t)}(g))$ der Poincaré–Exponenenten erfüllt dann die Ungleichung

$$p(n(t),t)(\lambda_1(g),\ldots,\lambda_{n(t)}(g)) \neq 0\,,$$

also ist $g \in \mathcal{G}_s(t)$ $\square$

Da

$$\mathcal{G}_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_s(n)\,,$$

folgt aus dem vorangegangenem Lemma unmittelbar das

Theorem 9.8 *Für eine kompakte Mannigfaltigkeit M und $2 \leq r \leq \infty$ ist die Menge der stark holprigen Riemannschen Metriken in $\mathcal{G}^r$ residual.*

Man kann also auch kurz sagen, daß eine C^r–generische Metrik für $2 \leq r \leq \infty$ stark holprig ist.

Wir werden nun zeigen, daß aus den Ergebnissen des Kapitels 7 folgt, daß eine stark holprige Metrik unendlich viele geometrisch verschiedene geschlossene Geodätische hat.

Lemma 9.9 *Sei $g \in \mathcal{G}^*(M)$ eine Metrik auf einer kompakten einfach–zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit nur endlich vielen geometrisch verschiedenen primen geschlossenen Geodätischen $(c_k)_{k=1,\ldots,r}$, wobei $c_k, k = 1,\ldots,m^*$ die nicht–hyperbolischen geschlossenen Geodätischen sind, mit der Folge $\Lambda_g = (\lambda_i(g))_{i=1,\ldots,n^*}$ von Poincaré–Exponenten ist. Dann gibt es eine nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische (d.h. $m^*, n^* \geq 1$) und es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_{n^*}]^*$ vom Grad m^* oder m^*-1 mit*

$$p(\lambda_1(g),\ldots,\lambda_{n^*}(g)) = 0\,.$$

Beweis. Nach Theorem 7.9 b) und Theorem 7.12 gibt es eine nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische. Sei $\alpha_k > 0$ der mittlere Index von c_k. Nach Lemma 4.9 und der Gleichung (9) gibt es ganze Zahlen $(I_k)_{k=1,\ldots,m^*}$ (es gilt $I_k = \operatorname{ind}(c_k^2) - \operatorname{ind}(c_k)$) und $(\epsilon_i)_{i=1,\ldots,n^*}$ mit $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$, so daß

$$\alpha_k = I_k + 2\sum_{j=1}^{l(k)} \epsilon_{L(k)+j}\lambda_{L(k)+j}\,.$$

Mit $b = d(m+1) - 2$ gilt für die topologische Invariante $B(d,m)$ aus Satz 7.8: $b\,B(d,m) \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Nach Theorem 7.9 gilt:

$$B(d,m) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\gamma_k}{\alpha_k}\,.$$

Wir setzen

$$B := b\left(B(d,m) - \sum_{k=m^*+1}^{r} \frac{\gamma_i}{\alpha_i}\right)$$

dann erfüllt das Polynom

$$\begin{aligned} p(x_1,\ldots,x_{n^*}) = B \prod_{k=1}^{m^*} &\left(I_k + 2\sum_{j=1}^{l(k)} \epsilon_{L(k)+j} x_{L(k)+j}\right) \\ -b \sum_{k=1}^{m^*} \gamma_k \prod_{s=1\,,\,s\neq k}^{m^*} &\left(I_s + 2\sum_{j=1}^{l(s)} \epsilon_{L(s)+j} x_{L(s)+j}\right) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$p(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n^*}) = 0\,.$$

Wenn $B \neq 0$, so hat p den Grad m^*, so ist $2^{m^*}B$ der Koeffizient von $x_1 \cdot x_{L(2)+1} \cdot \ldots \cdot x_{L(m^*)+1}$. Wenn $B = 0$, so ist $m^* > 1$ und p hat den Grad $m^* - 1$, so ist z.B. $-2^{m^*-1} \cdot b \cdot \gamma_1 \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_{L(2)+1} \cdot \ldots \cdot \epsilon_{L(m^*-1)+1}$ der Koeffizient von $x_1 \cdot x_{L(2)+1} \cdot \ldots \cdot x_{L(m^*-1)+1}$. □

Aus dem vorangegangenem Lemma und der Definition 9.6 einer stark holprigen Metrik folgt unmittelbar das

Theorem 9.10 *Eine stark holprige Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit besitzt unendlich viele geometrisch verschiedene geschlossene Geodätische.*

Nach Theorem 9.8 gilt also auch:

Theorem 9.11 *Für $2 \le r \le \infty$ hat eine C^r–generische Riemannsche Metrik auf einer einfach–zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische.*

Bemerkung 9.12 a) Eine nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische ist vom *Twist–Typ*, wenn eine offene Bedingung an den 3–Jet der Poincaré–Abbildung $\mathcal{P}_g(\Sigma, \gamma)$ erfüllt ist (vgl. [Kl1, 3.3]). Dann folgt aus [KT, thm.1], daß für eine C^4–generische Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit entweder alle geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind oder es eine nicht–hyperbolische geschlossene Geodätische vom Twist–Typ gibt. Nach einer Version des Birkhoff–Lewis Fixpunktsatzes für symplektische Transformationen vom Twist–Typ von Moser [Mo] [Kl1, App.3.1], die auf die Einschränkung der Poincaré–Abbildung auf die Zentrumsmannigfaltigkeit angewendet wird, gilt:

In jeder Tubenumgebung einer nicht–hyperbolischen geschlossenen Geodätischen vom Twist–Typ gibt es unendlich viele geschlossene Geodätische, deren Längen gegen ∞ streben.

Zusammen mit Theorem 7.13 folgt dann, daß es für eine C^4–generische Riemannsche Metrik auf einer kompakten einfach–zusammenhängenden Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Geodätische gibt, vgl. [Ra1, cor.2].

Dies gilt also auch für kompakte Mannigfaltigkeiten M mit endlicher Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$. Falls $\pi_1(M)$ endlich und nicht–trivial ist, so wurde dies Ergebnis bereits von Ballmann–Thorbergsson–Ziller in [BTZ2, cor.] bewiesen. Bangert–Klingenberg verbessern dies in [BaKl, §3], sie zeigen, daß es für eine kompakte Mannigfaltigkeit mit endlicher nicht–trivialer Fundamentalgruppe für eine in der C^4–Topologie offene und dichte Menge von Metriken unendlich viele geschlossene Geodätische gibt.

b) Für die 2–dimensionale Sphäre gilt sogar, daß es eine C^2–offene und dichte Menge von Metriken gibt, für die es unendlich viele geschlossene Geodätische gibt, vgl. [Ba2, 3.10].

c) Die Definition einer stark holprigen Metrik läßt sich wortwörtlich auf Finsler–Metriken übertragen. Das Lemma 9.9 gilt auch für Finsler–Metriken, d.h. eine stark holprige Finsler–Metrik auf einer kompakten einfach–zusammenhängenden Mannigfaltigkeit hat unendlich viele geschlossene Geodätische. Die Familie nicht–symmetrischer Finsler–Metriken nach Katok aus S^2, deren Konstruktion wir in Abschnitt 5.3 angegeben haben, ist nicht stark holprig.

Für Finsler–Metriken gilt nach Ziller [Zi2, S.141] das folgende *Schließungslemma*: Für eine C^2–generische Finsler–Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist die Menge der Richtungsvektoren geschlossener Geodätischen dicht im Einheitstangentialbündel.

Diese Aussage folgt aus dem Schließungslemma für Hamiltonsche Systeme. Es ist nicht bekannt, ob diese Aussage auch für Riemannsche Metriken gilt.

Literatur

[Ab] R.Abraham: *Bumpy metrics.* In: Global Analysis. Proc.Symp.Pure Math Vol. XIV Amer.Math.Soc. Providence R.I.(1970) 1–3

[An1] D.V.Anosov: *Geodesics in Finsler geometry.* (Russisch) Proc.of the International Congress of Mathematicians (Vancouver,B.C.1974) Vol.2 Canad.Math.Congress Montreal,Que.(1975) 293–297 = (Engl. Übersetzung) Amer.Math.Soc. Transl. **109** (1977) 81–85

[An2] D.V.Anosov: *On generic properties of closed geodesics* (Russisch) Izv.Akad.Nauk. SSSR **46** (1982) = (Engl. Übersetzung) Math. USSR Izv. **21** (1983) 1–29

[Ba] W.Ballmann: *Der Satz von Lusternik und Schnirelmann.* Bonner Math.Schr. **102**(1978) 1–25

[BTZ1] W.Ballmann, G.Thorbergsson & W.Ziller: *Closed geodesics on positively curved manifolds.* Ann. of Math. **116** (1982) 213–247

[BTZ2] W.Ballmann, G.Thorbergsson & W.Ziller: *Closed geodesics and the fundamental group.* Duke Math.J. **48** (1981) 585–588

[BTZ3] W.Ballmann, G.Thorbergsson & W.Ziller: *Existence of closed geodesics on positively curved manifolds.* J.Differential Geom. **18** (1983) 221–252

[Ba1] V.Bangert: *Closed geodesics on complete surfaces.* Math.Ann. **251** (1980) 83–96

[Ba2] V.Bangert: *Geodätische Linien auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Jber.d.Dt.Math.-Verein. **87** (1985) 39–66

[BaKl] V.Bangert & W.Klingenberg: *Homology generated by iterated closed geodesics.* Topology **22** (1983) 379–388

[Bo1] R.Bott: *Non–degenerate critical manifolds.* Ann.of Math. **60** (1954) 248–261

[Bo2] R.Bott: *On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory.* Comm.Pure Appl.Math. **9** (1956) 171–206

[Bo3] R.Bott: *Lectures on Morse theory, old and new.* Bull.Amer.Math.Soc. **7** (1982) 331–358

[BG] K.Burns & M.Gerber: *Real analytic Bernoulli geodesic flows on S^2.* Ergod.Th.& Dynam.Syst.**9**(1989) 27–45

[CC] G.E.Carlsson & R.L.Cohen: *The cyclic groups and the free loop space.* Comment.Math.Helvetici **62** (1987) 423–449

[CD] R.Cushman & J.J.Duistermaat: *The behaviour of the index of a periodic linear Hamiltonian system under iteration.* Adv.Math. **23** (1977) 1–21

[Do1] V.Donnay: *Geodesic flow on the two–sphere, Part I: positive measure entropy.* Ergod.Th.&Dynam.Syst.**8** (1988) 531–553

[Do2] V.Donnay: *Geodesic flow on the two–sphere, Part II: ergodicity.* In: Dynamical systems. Proc. Univ.of Maryland 1986–87. Hrsg. J.C.Alexander, Springer Lect.Notes **1342** (1988)112–153

[GM1] D.Gromoll & W.Meyer: *On differentiable functions with isolated critical points.* Topology **8** (1969) 361–369

[GM2] D.Gromoll & W.Meyer: *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds.* J.Differential Geom. **3** (1969) 493–510

[Gj] A.I.Grjuntal: *The existence of convex spherical metrics, all closed nonselfintersecting geodesics of which are hyperbolic.* (Russisch)

Izv.Akad.Nauk SSSR **43** (1979) 3–18 = (Engl. Übersetzung) Math. USSR Izv. **14** (1980) 3–18

[Gr] K.Grove: *Condition (C) for the energy integral on certain path–spaces and applications to the theory of geodesics.* J.Differential Geom. **8** (1973) 207–223

[GT] K.Grove & M.Tanaka: *On the number of invariant geodesics.* Acta Math. **140** (1978) 33–48

[Hi1] N.Hingston: *Equivariant Morse theory and closed geodesics.* J.Differential Geom. **19** (1984) 85–116

[Hi2] N.Hingston: *An equivariant model for the free loop space of* S^n*.* Preprint

[Hi3] N.Hingston: *Isometry invariant geodesics on spheres.* Duke Math.J. **57**(1988) 761–768

[Il] S.Illman: *Equivariant singular homology and cohomology for actions of compact Lie groups.* Proc.of 2nd conf.on cpt.transf.groups. Springer Lect.Notes Math. **298** (1972) 401–415

[Jo] J.Jost: *A nonparametric proof of the theorem of Lusternik and Schnirelman.* Arch.Math. **53** (1989) 497–509

[Ka] A.B.Katok:*Ergodic pertubations of degenerate integrable Hamiltonian systems.* Izv.Akad.Nauk SSSR Ser.Mat. **37**(1973) 539–576 (Russisch)= (Engl.Übersetzung) Math. USSR Izv.**7** (1973) 535–572

[Kl1] W.Klingenberg: *Lectures on closed geodesics.* Grundlehren der math.Wiss. **230** Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York 1978

[Kl2] W.Klingenberg: *Der Indexsatz für geschlossene Geodätische.* Math.Zeitschr. **139** (1974) 231–256

[KT] W.Klingenberg & F.Takens: *Generic properties of geodesic flows.* Math.Ann. **197** (1972) 323–334

[LS] L.Lusternik & L.Schnirelmann: *Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0.* C.R.Acad.Sci.Paris **189** (1929) 269–271

[Ma1] H.H.Matthias: *Eine Finsler Metrik auf* S^2 *mit nur zwei geschlossenen Geodätischen.* Bonner Math.Schr. **102** (1978)

[Ma2] H.H.Matthias: *Zwei Verallgemeinerungen eines Satzes von Gromoll–Meyer.* Bonner Math.Schr. **126** (1980)

[Ma] T.Matumoto: *Equivariant K–theory and Fredholm operators.* J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.IA **18** (1971) 363–374

[MW] J.Mawhin & M.Willem: *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Appl.Math.Sciences **74**, Springer Verlag New York Berlin Heidelberg 1989

[Me] F.Mercuri: *The critical point theory for the closed geodesic problem.* Math.Zeitschr. **156** (1971) 231–245

[MP] F.Mercuri & G.Palmieri: *Morse theory with low differentiability.* Boll.Un.Mat.Ital. B (7) **1** (1987) 621–631

[Mi] J.Milnor: *Morse theory.* Annals of Math.Studies **51** Princeton Univ. Press, 3.Aufl. Princeton 1969

[Mo1] M.Morse: *The calculus of variations in the large.* Am.Math.Soc.Coll.Publ. XVIII Providence R.I., 1934

[Mo2] M.Morse: *Generalized concavity theorems.* Proc.Nat.Ac.of Sci. **21** (1935) 359–362

[Mo] J.Moser: *Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D.Birkhoff.* In: Springer Lect.Notes **597** (1977) 464–494

[Pa] R.Palais: *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds.* Topology **5** (1966) 1–16

[Po] H.Poincaré: *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes.* Trans.Amer.Math.Soc. **6** (1905) 237–274

[Ra1] H.B.Rademacher: *On the average indices of closed geodesics.* J.Differential Geom. **29** (1989) 65–83

[Ra2] H.B.Rademacher: *On the equivariant Morse chain complex of the space of closed curves.* Math.Zeitschr. **201** (1989) 279–302

[Ra3] H.B.Rademacher: *Metrics with only finitely many isometry invariant geodesics.* Math.Ann. **284** (1989) 391–407

[Ra4] H.B.Rademacher: *On the number of closed geodesics on the 2–torus.* erscheint in: Archiv der Math.

[Su] D.Sullivan: *Infinitesimal computations in topology.* Inst.Hautes Études Sci.Publ.Math. **47** (1977) 269–331

[Sv] A.S.Švarc: *Homologie des Raums der geschlossenen Kurven.* (Russisch) Trudy Moskov Math.Obšč. **9** (1960) 3–44

[Th] G.Thorbergsson: *Non–hyperbolic closed geodesics.* Math.Scand. **44** (1979) 135–148

[VS] M.Vigué–Poirrier & D.Sullivan: *The homology theory of the closed geodesic problem.* J.Differential Geom. **11** (1976) 633–644

[Zi1] W.Ziller: *The free loop space of globally symmetric spaces.* Invent.Math. **41** (1977) 1–22

[Zi2] W.Ziller: *Geometry of the Katok examples.* Ergod.Th.& Dyn.Syst. **3** (1982) 135–157