Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 23.05.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

- Aufgabe 7-1 stimmt überein mit Aufgabe 6-4 !
- Aufgabe 7-4 präzisiert

Aufgaben, Blatt **Nr. 7**

7-1 (= Aufgabe 6-4) Sei $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf der Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$, so dass

$$\lim_{\mathrm{Im} z \to 0} f(z) = 0,$$

d.h. die Funktion f kann zu einer stetige Funktion auf der abgeschlossenen Halbebene $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 0\}$ erweitert werden.

Zeigen Sie: $f \equiv 0$ auf $\mathbb{H}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\frac{f}{i+z} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

identisch Null ist.

7-2 Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ so daß $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = 0$.

7-3 Welche Werte kann das Integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$

für geschlossene Kurven γ in $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ annehmen?

7-4 Gegeben sind $n, k \in \mathbb{N}$, und $r \in (0,1)$. Bestimmen Sie die Umlaufzahl der Kurve

$$\gamma(t) = \exp(2\pi i n t) + r \exp(2\pi i k t)\,;\; t \in [0,1]$$

um den Nullpunkt.