

## Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 09.05.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen,  
Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt Nr. 5

## Aufgabe 5-4 Druckfehler korrigiert

5-1 Setze  $\kappa(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$ . Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_{\kappa(-1,1)} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \quad ; \quad (b) \int_{\kappa(0,2)} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

$$(c) \int_{\kappa(-2i,3)} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$$

5-2 (a) Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $L$  eine Gerade. Zeigen Sie die folgende Aussage: Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist und  $f : U - L \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, dann ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

(b) Gegeben ist ein Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$ , das symmetrisch zur reellen Achse ist, d.h.  $z \in U \Leftrightarrow \bar{z} \in U$ . Setze  $U_{\pm} := \{z \in U; \pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$  und  $U_0 = U \cap \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Wenn  $f : U_+ \cup U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion ist, die auf  $U_+$  holomorph ist und auf  $U_0$  reellwertig, dann ist die Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & ; \quad z \in U_+ \cup U_0 \\ \overline{f(\bar{z})} & ; \quad z \in U_- \end{cases}$$

holomorph.

5-3 Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-1-i)^2}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der zugehörigen Taylorreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  mit  $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ .

5-4 Bestimmen Sie die Nullstellenordnungen der Funktionen  $\sin z$ ,  $\tan z$ ,  $\sin^2 z$  und  $\sin z^2$  in den Nullstellen.