Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 25.04.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 3**

3-1 Zeigen Sie die folgende Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kz) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+1/2)\,z\right)}{2\,\sin\left(z/2\right)} \quad ; \quad z \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}\,.$$

3-2 Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) f ist konstant,

(b) $\mathrm{Re}(f)$ ist konstant,

(c) $|f|$ ist konstant,

(d) $f' = 0$.

3-3 Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion $f; [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\left| \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\,dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| .$$

3-4 Gegeben sind reelle Zahlen $a > b > 0$ und der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, \gamma(t) = ae^{it} + be^{-it}$. Bestimmen Sie die Spur $\{\gamma(t); t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C}$ und die Kurvenintegrale

$$(a) \int_\gamma z\,dz \qquad ; \qquad (b) \int_\gamma z^2\,dz\,.$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Philip Kupper