Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 18.04.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen,
Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt Nr. 2

2-1 Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, und geben Sie ggf. die zugehörige holomorphe Funktion $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ an.

2-2 Es sei $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ der Laplace Operator in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Wenn $f = g + ih$ holomorph und zweimal differenzierbar ist, dann sind der Realteil g und der Imaginärteil h von f harmonisch, d.h. $\Delta g = \Delta h = 0$.

2-3 Zeigen Sie: Wenn für eine komplexe Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Grenzwert

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert, so ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

2-4 Definiere:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile von $\tan z$ und $\cot z$.