

Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Korrektur nur falls noch Punkte für die Zulassung zur Klausur benötigt werden:

Abgabe: Dienstag, 27.06.2017 vor der Vorlesung

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur, Blatt **Nr. 12**

12-1 In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$ komplex differenzierbar?

12-2 Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, für die gilt

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = x^2 - y^2 + 4x.$$

12-3 Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete folgender Laurentreihen:

(a)
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n + 2^{-n}}.$$

(b)
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{|n-1|!}.$$

12-4 Sei $\Gamma := \gamma_1 - 3\gamma_2$ das folgende Zyklus in $\mathbb{C}$:

$$\gamma_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i/2| = 1\}; \quad \gamma_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| = 1\}.$$

Es wird vorausgesetzt, die Kreise γ_1, γ_2 sind positiv orientiert.

Berechnen Sie:

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\sin(\pi z)} + \sin\left(\frac{1}{z-i}\right) \right) dz.$$

Sind die Funktionen $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ und $\sin\left(\frac{1}{z-i}\right)$ meromorph auf $\mathbb{C}$?

12-5 Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und es gebe Konstanten $M, R > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt: $|f(z)| \leq M|z|$.

Zeigen Sie: f ist eine affine Funktion (d.h. $f(z) = az + b$, mit $a, b \in \mathbb{C}$ konstanten).

12-6 Es sei $G := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq ki, k \geq 0\}$, und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ der auf G definierte (holomorphe) Zweig des Logarithmus mit $f(1) = 4\pi i$. Bestimmen Sie $f(-1)$.

12-7 Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x - \pi/4} := \int_{\pi/4}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x - \pi/4} + \int_{-\infty}^{\pi/4} \frac{\sin x \, dx}{x - \pi/4}.$$