Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 20.06.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, **Bonuszettel**, Blatt **Nr. 11**

11-1 Bestimmen Sie den Typ der folgenden isolierten Singularitäten z_0 der Funktion f. Bei hebbaren Singularitäten bestimmen Sie den Wert $f(z_0)$, bei Polen bestimmen Sie den Hauptteil.

(a) $f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$; $z_0 = -i$.

(b) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$; $z_0 = 0$.

(c) $f(z) = \cos(1/z)$; $z_0 = 0$.

(d) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^4}$; $z_0 = 0$.

11-2 Zeigen Sie: Wenn die holomorphen Funktionen f, g in einem Punkt z_0 jeweils eine Nullstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ haben, dann ist z_0 eine hebbare Singularität der Funktion f/g und es gilt für die n-ten Ableitungen $f^{(n)}, g^{(n)}$:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} .$$

11-3 Zeigen Sie: Unter der stereographischen Projektion $\phi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ werden Kreise auf S^2 auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet werden. Umgekehrt werden unter unter $\phi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2$ Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ auf Kreise auf S^2 abgebildet.

11-4 Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in ihren Singularitäten:

(a) $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^3}$.

(b) $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$.

(c) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$.

(d) $f(z) = z \exp(1/(1-z))$.