Funktionentheorie 1

Sommersemester 2017

Abgabe: Dienstag, 11.04.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 1**

1-1 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

(a) i^n;

(b) $\frac{(1+i)^5}{(1+i)^3}$;

(c) $(1+i)^4$

1-2 Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, f(z) := z^2$.

(a) Betrachten Sie f als eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und berechne Sie die Jakobi Matrix $df_z \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$ von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Determinante $r(z) := \det df_z$ nicht-negativ ist und dass die 2×2 Matrix $\frac{1}{\sqrt{r(z)}} df_z$, $z \neq 0$, *orthogonal* ist.

1-3 Sei $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom, d.h. es gilt

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

für beliebige Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \ldots, n$.

(b) Seien alle $a_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle.

1-4 Zeigen Sie: Wenn eine Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ holomorph und reelwertig ist, dann ist f konstant.