Analysis 2

Sommersemester 2016
Aufgaben, Blatt **Nr. 9**

Abgabe: Dienstag, 14.06.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

9-1 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, für die es eine reelle Zahl $c \in (0,1)$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann bilden wir die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix von g in allen Punkten invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung g injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.

9-2 Gegeben ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; (x,y) \longmapsto F(x,y) = \arctan(x^{13} + \sinh^7(y)) - \exp(x^6 + y) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es dann für ein $\epsilon > 0$ eine differenzierbare Funktion $g : (\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, gibt mit $F(x, g(x)) = 1$ für alle $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

9-3 Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2, x - y\right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung nicht bijektiv ist.

(b) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}^2$ an, in denen f *lokal invertierbar* ist (d.h. invertierbar in einer hinreichend kleinen Umgebung von a).

(c) Es sei $H := \{(x,y) \mid x+y \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|H$ injektiv ist, berechnen Sie das Bild $f(H)$ und die Umkehrfunktion $g := (f|H)^{-1}$.

(d) Geben Sie alle $a \in f(H)$ an, in denen g differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix dg_a für alle diese Punkte.

9-4 Für $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei p_x das Polynom in der Variablen t definiert durch

$$p_x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n.$$

Sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ und sei ξ eine einfache Nullstelle des Polynoms $t \mapsto p_a(t)$. (d.h. es gibt ein Polynom $q(t)$ so dass $p_a(t) = (t-\xi)q(t)$ und $q(\xi) \neq 0$.) Zeigen Sie: Es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi : (a - \epsilon, a + \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\Phi(a) = \xi$ und $\Phi(x)$ ist eine einfache Nullstelle des Polynoms $p_x(t)$ für alle $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

(Also hängen die einfachen Nullstellen eines Polynoms stetig differenzierbar von den Koeffizienten des Polynoms ab.)